Semiarithmetische Fuchssche Gruppen und modulare Einbettungen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe–Universität
in Frankfurt am Main

von
Sabine Ricker
aus Rheda–Wiedenbrück

Frankfurt am Main
2000

(D F 1)

Inhaltsverzeichnis

Die Mathematik ist dem Liebestrieb nicht abträglich.

Paul Möbius (1853 – 1907), Verfasser von
„Der physiologische Schwachsinn der Frau“

Einleitung

Arithmetische Fuchssche Gruppen sind diskrete Untergruppen der $PSL(2, \mathbb{R})$, deren Elemente durch gewisse „arithmetische“ Konstruktionen gewonnen werden (das wohl bekannteste Beispiel ist die $PSL(2, \mathbb{Z})$). Sie stehen aufgrund ihrer zahlreichen Verbindungen zur Zahlentheorie und ihrer geometrischen Eigenschaften im besonderen Interesse der Forschung. Hier lassen sich exemplarisch folgende Resultate nennen: Die Fourierkoeffizienten der automorphen Formen arithmetischer Gruppen weisen vielfältige Beziehungen zu wichtigen zahlentheoretischen Funktionen auf bzw. verfügen über spezielle algebraische Eigenschaften; die Riemannschen Flächen R, die eine arithmetische Gruppe als Überlagerungsgruppe besitzen, lassen sich durch ihr Längenspektrum (das heißt durch die Längen geschlossener Geodätischer auf R) eindeutig klassifizieren.

Man weiß jedoch, daß es nur jeweils endlich viele verschiedene arithmetische Fuchssche Gruppen einer Signatur (d.h. einer gewählten Präsentierung) gibt. Nach einem Resultat von Paula Cohen und Jürgen Wolfart [5] besitzen aber wenigstens die automorphen Formen aller (auch der nicht–arithmetischen) Dreiecksgruppen gewisse arithmetische Eigenschaften der Modulformen arithmetischer Gruppen. Dies ergibt sich aus der sogenannten modularen Einbettbarkeit der Dreiecksgruppen, die wie folgt erklärt ist: Jede Dreiecksgruppe Γ, die in der üblichen Weise via gebrochen–linearer Transformationen auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ operiert, läßt sich in natürlicher Weise als Untergruppe einer arithmetischen Gruppe Δ ansehen, die ihrerseits auf einem Produkt oberer Halbebenen $\mathbb{H}^r$ operiert (zur genauen Charakterisierung dieser Operation siehe Definition 1.1 dieser Arbeit). Bezeichnen wir mit $f : \Gamma \hookrightarrow \Delta$ diese Inklusionsabbildung, so ist f sogar mit der Operation von Γ auf $\mathbb{H}$ und der Operation von Δ auf $\mathbb{H}^r$ holomorph verträglich, das heißt, es existiert eine holomorphe Abbildung $F = (id, f_2, \ldots, f_r) : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}^r$ mit:

$$F(\gamma(z)) = f(\gamma)(F(z))$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ und alle $\gamma \in \Gamma$. Insbesondere induziert dieses F eine Quotientenraumabbildung $\overline{F}$ zwischen der Riemannschen Fläche $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ und der Shimura–Varietät $\Delta\backslash\mathbb{H}^r$,

$$\overline{F} : \Gamma\backslash\mathbb{H} \mapsto \Delta\backslash\mathbb{H}^r.$$

Es besteht die starke Vermutung, daß keine weiteren Fuchsschen Gruppen, das heißt Fuchssche Gruppen, die weder selbst schon arithmetisch noch Untergruppe einer Dreiecksgruppe sind, eine solche modulare Einbettung erlauben. Die vorliegende Arbeit löst dieses Problem nicht vollständig, nennt aber eine ganze Reihe verschiedener starker Einschränkungen, denen eine solche Gruppe notwendigerweise unterworfen wäre und kann damit die modulare Einbettbarkeit von symmetrischen Vierecksgruppen einiger spezieller Signaturen generell ausschließen.

Im einzelnen ist die Arbeit wie folgt aufgebaut: Wir führen zunächst den auf Schmutz Schaller/Wolfart [14] zurückgehenden Begriff der semiarithmetischen Fuchsschen Gruppe ein: Bezeichnen wir mit Γ^2 die von allen Quadraten von Elementen aus Γ erzeugte Untergruppe und mit $\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)$ die Menge aller Spuren von Elementen aus Γ^2, so nennen wir eine cofinite Fuchssche Gruppe Γ semiarithmetisch, wenn der Spurkörper $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2))$ gewissen arithmetischen Bedingungen genügt (Definition 1.3). Es läßt sich leicht einsehen, daß modular einbettbare Fuchssche Gruppen immer semiarithmetisch sein müssen (vgl. auch Bemerkung (i) am Ende des ersten Abschnittes).

Der darauffolgende Abschnitt „Spurkörper und Definitionskörper“ dehnt zunächst (Satz 2.5) das von Takeuchi [16] für cofinite Fuchssche Gruppen bekannte Resultat $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) = \mathbb{Q}(tr^2(\gamma)\,|\gamma \in \Gamma)$ auf eine größere Menge von Untergruppen der $PSL(2,\mathbb{R})$ aus (die insbesondere alle, auch nicht–cofinite, Fuchssche Gruppen umfaßt) und widmet sich abschließend der Frage, unter welchen Voraussetzungen sich eine gegebene Fuchssche Gruppe geeignet in der $PSL(2,\mathbb{R})$ konjugieren läßt, so daß die Einträge aller Matrizen ausschließlich im Spurkörper $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\,(\Gamma))$ liegen (Satz 2.10). Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind eher peripher und werden für den Beweis der Hauptresultate dieser Arbeit nicht benötigt.

Anschließend stellen wir symmetrische Fuchssche Gruppen Γ vor (Definition 3.2), das heißt Gruppen, die (wie z. B. alle Dreiecksgruppen) mit Index 2 in einer Gruppe $S(\Gamma)$ enthalten sind, die von hyperbolischen Spiegelungen erzeugt wird. Für die zugehörigen Riemannschen Flächen $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ bedeutet dies, daß sie isomorph zur komplex konjugierten Riemannschen Fläche sind; bei symmetrischen Vierecksgruppen Γ der Signatur $[p,q,r,t]$ hat es insbesondere zur Folge, daß der Isomorphismus

$$\varphi : \overline{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \xhookrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\,,$$

der o.B.d.A. so normalisiert sei, daß die Verzweigungspunkte der Ordnung p, q und r auf die Punkte $0, 1$ und ∞ abgebildet werden, den vierten Verzweigungspunkt der Ordnung t auch auf eine Punkt der reellen Achse abbildet. Symmetrische Vierecksgruppen der Signaturen $[2,2,2,t]$ betrachten wir hierbei noch genauer, für die wir leicht zu verifizierende Kriterien für Semiarithmetizität bzw. Arithmetizität herleiten (Korollar 3.7 bzw. Satz 4.18).

Im letzten Abschnitt „Modulare Einbettungen" beweisen wir zunächst eine Verschärfung eines Resultates von Schmutz Schaller/Wolfart [14], wonach bei modular einbettbaren Fuchsschen Gruppen algebraische Konjugation stets die Spuren aller hyperbolischen Elemente betragsmäßig verringert (Satz 4.11). Danach kommen wir schließlich zu den Hauptresultaten dieser Arbeit: Modulare Einbettbarkeit einer semiarithmetischen Fuchsschen Gruppe Γ ist nach Schmutz Schaller/Wolfart [14] gleichbedeutend mit der Existenz von Funktionen, die die obere Halbebene in sich abbilden und eine spezielle Funktionalgleichung für alle Elemente aus Γ^2 erfüllen. Genauer gesagt, muß für jede nicht–triviale Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$ eine holomorphe Funktion $f^\sigma : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ existieren mit:

$$f^\sigma \circ \gamma(z) = \sigma(\gamma) \circ f^\sigma(z), \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \text{ und alle } \gamma \in \Gamma^2$$

($\sigma(\gamma)$ bezeichne dabei die Matrix, die durch simultane σ–Konjugation aller Matrixeinträge aus γ hervorgeht). Wir zeigen zunächst, daß unter gewissen Voraussetzungen an die Gruppe diese Funktionalgleichungen dann automatisch für alle Elemente $\gamma \in \Gamma$, im Fall von symmetrischen Fuchsschen Gruppen sogar für alle $\gamma \in S(\Gamma)$ gültig bleiben (Satz 4.16). Bei symmetrischen Fuchsschen Gruppen stellt dies starke Anforderungen an das Verhalten dieser Funktionen auf dem Rand des Fundamentalbereichs. Im Fall von symmetrischen Vierecksgruppen führt es insbesondere in der Regel dazu, daß die Existenz einer modularen Einbettung äquivalent ist zu der Existenz erweiterter Riemannscher Abbildungen, die gewisse hyperbolische Vierecke seiten– und eckentreu aufeinander abbilden (Korollar 4.25). Dies erlaubt es uns, wie schon zu Anfang der Einleitung erwähnt, die modulare Einbettbarkeit von nicht–arithmetischen symmetrischen Vierecksgruppen der Signaturen $[2, 2, t, t]$ und $[2, 2, 2, t]$, wobei $t \in \{3, 4, 6\}$, generell auszuschließen (Korollar 4.26).

Den Abschluß dieser Arbeit (Satz 4.28) bilden konkrete Beispiele von nicht–arithmetischen symmetrischen Vierecksgruppen, die alle in Korollar 4.25 bewiesenen notwendigen Kriterien für modulare Einbettbarkeit erfüllen. Bei ihnen hängt die modulare Einbettbarkeit also nur noch von der Existenz der oben erwähnten Riemannschen Abbildung ab. Es gibt eine Reihe numerischer Verfahren (siehe z. B. Bjørstad/Grosse [3], Howell [7]), die die Riemannsche Abbildung vom Einheitskreis auf ein gegebenes Kreisbogenvieleck beliebig genau zu approximieren vermögen. Mit Hilfe dieser Verfahren ließe sich also im konkreten Einzelfall jeweils zumindest bestimmen, welche Gruppen nicht modular einbettbar sind. Da eine solche Vorgehensweise das Problem aber schon für die unendlich vielen verschiedenen in Satz 4.28 auf-geführten Gruppen nicht zu lösen vermag, erscheint mir dieser Ansatz auf Dauer nicht sehr befriedigend, so daß hier weiterer Forschungsbedarf besteht.

1 Definition semiarithmetischer Fuchsscher Gruppen

Wer sich keinen Punkt denken kann, der ist einfach zu faul dazu.

Mathematiklehrer Brennecke
in Wilhelm Buschs (1832 – 1908) „Eduards Traum“

Definition 1.1

(i) Mit $\mathbb{H}$ sei die obere Halbebene bezeichnet, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

(ii) (siehe z. B. A. Borel/Harish– Chandra [1]) Sei K ein total–reeller Körper vom Grad $n = [K : \mathbb{Q}]$ und σ_1 bezeichne die Identität:

$$\sigma_1 : K \hookrightarrow \mathbb{R} \,.$$

Sei A eine Quaternionen–Algebra über K dergestalt, daß sich die ersten r $(r \geqslant 1)$ der n Einbettungen

$$\sigma_i : K \hookrightarrow \mathbb{R} \,,\, i = 1, \ldots, n,$$

zu Einbettungen von A in die Matrixalgebra $M(2, \mathbb{R})$ fortsetzen lassen, während die restlichen $n - r$ Einbettungen $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n$ zu Einbettungen von A in die Hamilton– Quaternionen–Algebra fortsetzbar sind.

Sei O eine Ordnung in A und definiere:

$$U := \{\varepsilon \in O \mid \varepsilon\, O = O \text{ und } n(\varepsilon) = \det \varepsilon = 1\} \,,$$

dabei sei $n(\varepsilon)$ die reduzierte Norm. Definiere $\Gamma(A, O) := \sigma_1(U) \subseteq SL(2, \mathbb{R})$. Die Operation von $\Gamma(A, O)$ auf $\mathbb{H}^r$ sei komponentenweise definiert:

$$\varepsilon : (z_1, \ldots, z_r) \mapsto (\sigma_1(\varepsilon) z_1, \ldots, \sigma_r(\varepsilon) z_r) \,,$$

wobei $z_i \mapsto \sigma_i(\varepsilon) z_i \,, i = 1, \ldots, r$, die übliche Operation durch linear–gebrochene Transformationen sei.

(iii) Eine Untergruppe H der $SL(2, \mathbb{R})$ wird eine auf $\mathbb{H}^r$ operierende arithmetische Gruppe genannt, wenn sie zu einer oben definierten Gruppe $\Gamma(A, O)$ kommensurabel ist (zwei Gruppen G und G' heißen kommensurabel, wenn ihr Schnitt $G \cap G'$ endlichen Index sowohl in G als auch in G' hat). Häufig wird aber auch das kanonische Bild Δ von H in der $PSL(2, \mathbb{R})$ so bezeichnet. Im Fall $r = 1$ nennen wir H eine arithmetische Fuchssche Gruppe.

Bemerkung: Nach Shimura [15] gilt: $\Gamma(A, O)$ operiert diskontinuierlich auf $\mathbb{H}^r$, und der Quotientenraum $\Gamma(A, O) \backslash \mathbb{H}^r$ hat endliches Volumen. Im Fall

$r = 1$ ist eine arithmetische Gruppe Γ also eine diskrete Untergruppe der $PSL(2,\mathbb{R})$. Eine Einführung in das Thema der arithmetischen Fuchsschen Gruppen ist z. B. in Katok [10] zu finden.

Auf Takeuchi [16] geht folgende äquivalente Definition arithmetischer Fuchsscher Gruppen zurück:

Definition 1.2

(i) Sei Γ eine Untergruppe der $PSL(2,\mathbb{R})$. Dann verstehen wir unter der Gruppe Γ^2 die von allen Quadraten von Elementen aus Γ erzeugte Untergruppe von Γ, also: $\Gamma^2 := <\gamma^2|\gamma \in \Gamma>$.

(ii) Sei $PS^*L(2,\mathbb{R})$ definiert als $PS^*L(2,\mathbb{R}) = S^*L(2,\mathbb{R})/\{\pm id\}$, wobei $S^*L(2,\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen $2\times 2-$Matrizen mit Determinante ± 1 bezeichne. Bekanntermaßen ist $PS^*L(2,\mathbb{R})$ isomorph zur Gruppe der Isometrien der oberen Halbebene $\mathit{Isom}\,(\mathbb{H})$.

(iii) Zu einer Untergruppe $\Gamma \subset \mathit{Isom}\,(\mathbb{H}) = PS^*L(2,\mathbb{R})$ definiere die Spurenmenge $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ durch

$$\mathrm{Tr}(\Gamma) := \{|tr(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}\,,$$

dabei sei $tr(\gamma)$ die Spur von $\gamma \in PS^*L(2,\mathbb{R})$.

(iv) Eine Fuchssche Gruppe Γ wird cofinit genannt, wenn die zugehörige Riemannsche Fläche $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ endliches Volumen hat.

(v) Eine cofinite Fuchssche Gruppe ist eine arithmetische Fuchssche Gruppe genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $K = \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2))$ ist ein Zahlkörper endlichen Grades $n = [K : \mathbb{Q}]$ und $\mathrm{Tr}(\Gamma^2)$ ist in dem Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_K$ von K enthalten.

(2) Sei σ_i eine der n Einbettungen von K in $\mathbb{C}$, und sei σ_i nicht die Identität. Dann gilt für alle $\gamma \in \Gamma^2$:

$$\sigma_i\,(|tr(\gamma)|) \in [-2, 2].$$

Bemerkungen:

(i) Die Untergruppe Γ^2 ist Normalteiler in Γ wegen

$$\alpha^{-1}\left(\prod_{i=1}^{m}\gamma_i^2\right)\alpha = \prod_{i=1}^{n}\left(\alpha^{-1}\gamma_i\alpha\right)^2.$$

Ist Γ endlich erzeugt (was beispielsweise für cofinite Gruppen Γ immer erfüllt ist), so hat Γ^2 endlichen Index in Γ, und da alle Elemente in Γ/Γ^2 offensichtlich Ordnung 2 zwei haben, folgt mit dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen: $\Gamma/\Gamma^2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

(ii) Bedingung (2) in obiger Definition (v) impliziert: $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))$ist ein total–reeller Körper.

Im Hinblick auf die zweite Definition arithmetischer Fuchsscher Gruppen erscheint folgende Verallgemeinerung natürlich:

Definition 1.3 Eine cofinite Fuchssche Gruppe Γ wird semiarithmetisch genannt, wenn $K = \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))$ ein total–reeller Zahlkörper vom Grad $n = [K : \mathbb{Q}]$ ist und wenn $\mathrm{Tr}(\Gamma^2)$ im Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_K$ von K enthalten ist. Γ wird strikt semiarithmetisch genannt, wenn Γ nicht arithmetisch ist.

Für äquivalente Charakterisierungen semiarithmetischer Fuchsscher Gruppen siehe Schmutz Schaller/Wolfart [14].

Im folgenden betrachten wir eine besonders interessante Klasse semiarithmetischer Fuchsscher Gruppen.

Definition 1.4 Sei Γ eine cofinite Fuchssche Gruppe, für die eine natürliche Inklusionsabbildung

$$f : \Gamma^2 \hookrightarrow \Delta$$

in eine auf $\mathbb{H}^r$ operierende arithmetische Gruppe Δ und eine mit den Gruppenoperationen verträgliche holomorphe Einbettung

$$F : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{H}^r$$

existiert, d. h.

$$F(\gamma z) = f(\gamma)F(z)$$

für alle $\gamma \in \Gamma^2$ und alle $z \in \mathbb{H}$. Dann wird (f, F) eine modulare Einbettung genannt, und wir sagen, daß Γ modular einbettbar ist.

Bemerkungen:

(i) Modular einbettbare cofinite Fuchssche Gruppen sind immer semiarithmetisch, da sie sich sonst nicht in eine arithmetische Gruppe einschließen lassen (siehe Schmutz Schaller/Wolfart [14]).

(ii) Die Beschränkung auf Γ^2 in der Definition der modularen Einbettbarkeit resultiert daraus, daß nur $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))$, aber i. a. nicht $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma))$ bei Übergang zu kommensurablen Gruppen unverändert bleibt.

(iii) Nach einem Resultat von Cohen/Wolfart [5] sind alle Dreiecksgruppen und ihre Untergruppen endlichen Indexes modular einbettbar, und diese sind fast alle strikt–semiarithmetisch (Takeuchi [17]).

(iv) Sei Γ eine semiarithmetische Gruppe, sei $K := \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))$ und sei σ eine der Einbettungen von K in $\mathbb{R}$. Die Elemente von Γ^2 sind Matrizen in $PSL(2, \mathbb{R})$, genauer gesagt können sie als Matrizen in $PSL(2, K')$ gewählt werden, wobei K' endliche Körpererweiterung von K ist. Nach Takeuchi [16] kann man für eine geeignete $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation von Γ den Körper $K' = K(\lambda)$ wählen, wobei λ Eigenwert eines beliebigen hyperbolischen Elementes $\gamma \in \Gamma$ ist, also $K(\lambda) = K(\sqrt{tr^2(\gamma) - 4}\,)$ (für weitere Möglichkeiten, K' zu wählen, siehe Waterman/Maclachan [18] und beachte das Ende von Abschnitt 2.3 dieser Arbeit). Somit läßt sich, indem man zu einer Fortsetzung von σ übergeht, $\sigma(\gamma)$ für alle $\gamma \in \Gamma^2$ definieren (σ angewandt auf die einzelnen Matrixeinträge). Gilt $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$, existiert also ein hyperbolisches $\tilde{\gamma} \in \Gamma^2$ mit $|\sigma(tr(\tilde{\gamma}))| > 2$, so läßt sich insbesondere σ durch Wahl von $K' = K(\sqrt{tr^2(\tilde{\gamma}) - 4}\,)$ dergestalt fortsetzen, daß auch $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$. Unsere Definition modularer Einbettbarkeit ist also in dem Sinne zu verstehen, daß wir eine cofinite Fuchssche Gruppe Γ modular einbettbar nennen, wenn eine geeignete $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation von Γ existiert, die die Bedingungen von Definition 1.4 erfüllt.

2 Spurkörper und Darstellungskörper

Folgender Satz erlaubt es, den Ring zu bestimmen, in dem die Spuren aller Elemente einer cofiniten Fuchsschen Gruppe Γ enthalten sind.

Satz 2.1 (Takeuchi [16]) *Sei $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine Menge von Erzeugenden einer cofiniten Fuchsschen Gruppe Γ. Für jede Teilmenge $\{i_1, , \ldots, i_m\}$ von $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiere $t_{i_1 \ldots i_m} := |tr(a_{i_1} \ldots a_{i_m})|$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Tr}(\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}\,[t_{i_1 \ldots i_m} | \{i_1, , \ldots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}]\,.$$

Für das Rechnen mit Spuren sind einige einfache Formeln sehr nützlich:

Lemma 2.2 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{T} \in SL(2, \mathbb{R})$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & tr(\mathcal{A}) & = & tr\left(\mathcal{A}^{-1}\right) \\
(2) & tr(\mathcal{A})\,tr(\mathcal{B}) & = & tr(\mathcal{A}\mathcal{B}) + tr\left(\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}\right) \\
(3) & tr(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{T}) & = & tr(\mathcal{A}\mathcal{B})\,tr(\mathcal{A}\mathcal{T}) - tr\left(\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1}\right)
\end{array}$$

Beweis: (1) und (2) lassen sich leicht ausrechnen, und (3) folgt aus (2), indem man setzt: $\mathcal{A}' := \mathcal{A}\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}' := \mathcal{A}\mathcal{T}$ und beachtet, daß Spuren konjugationsinvariant sind.

□

Wir werden jetzt zunächst eine andere Darstellung für den Spurkörper $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))$ herleiten:

Lemma 2.3 *Seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1} \in PSL(2,\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$, und für alle n–elementigen Teilmengen $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ sowie für alle Vektoren $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \ldots, n$, gelte:*

$$tr\left(\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}\gamma_{i_2}^{\varepsilon_2}\ldots\gamma_{i_n}^{\varepsilon_n}\right) = 0.$$

Dann ist $n \equiv 1 \bmod 2, tr(\gamma_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n+1$, und alle Fixpunkte E_i der γ_i, $i = 1, \ldots, n+1$, liegen auf einer Geodätischen.

Beweis: Wir zeigen zunächst induktiv: $n \equiv 0 \bmod 2$ ist nicht möglich.
Induktionsverankerung $n = 2$:

Angenommen $tr(\gamma_1\gamma_2) = tr\left(\gamma_1\gamma_2^{-1}\right) = 0$. Nach Formel (2) aus Lemma 2.2 impliziert dies: $tr(\gamma_1) = 0$ oder $tr(\gamma_2) = 0$. Sei o.B.d.A. $tr(\gamma_1) = 0$; dasselbe Argument nun angewandt auf $tr(\gamma_2\gamma_3)$ liefert $tr(\gamma_2) = 0$ oder $tr(\gamma_3) = 0$. Damit ist aber entweder $\gamma_1\gamma_2$ oder $\gamma_1\gamma_3$ die Identität oder hyperbolisch, was in offensichtlichem Widerspruch zur Voraussetzung steht.
Induktionsannahme:

Sei die Behauptung für $(n-2) \in \mathbb{N}$, n gerade, wahr.
Induktionsschritt: $n - 2 \Rightarrow n$:

Angenommen $tr(\gamma_1\gamma_2) \neq 0$. Dann gilt nach Voraussetzung für alle $(n-2)$–elementigen Teilmengen $\{i_1, \ldots, i_{n-2}\}$ von $\{3, \ldots, n+1\}$ sowie beliebiges $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2} \in \{-1, 1\}$ (benutze erneut Formel (2) aus Lemma 2.2):

$$\begin{aligned} tr(\gamma_1\gamma_2)\, tr(\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}\ldots\gamma_{i_{n-2}}^{\varepsilon_{n-2}}) &= tr(\gamma_1\gamma_2\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}\ldots\gamma_{i_{n-2}}^{\varepsilon_{n-2}}) + tr(\gamma_1\gamma_2\gamma_{i_{n-2}}^{-\varepsilon_{n-2}}\ldots\gamma_{i_1}^{-\varepsilon_1}) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Also: $tr(\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}\ldots\gamma_{i_{n-2}}^{\varepsilon_{n-2}}) = 0$. Dies steht allerdings im Widerspruch zur Induktionsannahme. Somit gilt doch: $tr(\gamma_1\gamma_2) = 0$. Analoge Schlüsse ergeben:

$$tr\left(\gamma_i^{\varepsilon_i}\gamma_j^{\varepsilon_j}\right) = 0 \text{ für alle } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n \text{ und } \varepsilon_i, \varepsilon_j \in \{-1, 1\} \text{ beliebig,}$$

woraus sich auf dieselbe Weise wie in der Induktionsverankerung ein Widerspruch herleiten läßt.

Es bleibt zu zeigen: für $n \equiv 1 \bmod 2$ gilt $tr(\gamma_i) = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n+1$, und alle Fixpunkte der γ_i, $i = 1, \ldots, n+1$, liegen auf einer Geodätischen. Wir führen nochmals Induktion.
Induktionsverankerung $n = 1$:

Hier ist nichts zu zeigen.
Induktionsannahme:

Sei die Behauptung für $(n-2) \in \mathbb{N}$, n ungerade, wahr.
Induktionsschritt $n-2 \Rightarrow n$:

Unter Verwendung des oben Bewiesenen können wir eine $(n-1)$–elementige Teilmenge $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\} \subset \{2, \ldots, n+1\}$ und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \ldots n-1$, so wählen, daß

$$tr\left(\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}\gamma_{i_2}^{\varepsilon_2}\ldots\gamma_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{i_{n-1}}}\right) \neq 0.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} tr(\gamma_1)\, tr\left(\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}\ldots\gamma_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}\right) &= tr\left(\gamma_1\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}\ldots\gamma_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}\right) + tr\left(\gamma_1\gamma_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}}\ldots\gamma_{i_1}^{-\varepsilon_1}\right) \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

woraus wir erhalten: $tr(\gamma_1) = 0$. Analog läßt sich folgern: $tr(\gamma_i) = 0$, für $i = 2, \ldots, n+1$.

Um die letzte Aussage über die Lage der Fixpunkte zu beweisen, betrachten wir zunächst den Fall $n = 3$. Nach Voraussetzung bzw. dem bisher Bewiesenen ist

$$tr(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = tr(\gamma_1) = tr(\gamma_2) = tr(\gamma_3) = 0.$$

O.B.d.A. sei $\gamma_1 \neq \gamma_2$, also ist $\gamma_1\gamma_2$ ein hyperbolisches Element, dessen Achse die eindeutig bestimmte Geodätische durch die Fixpunkte von γ_1 und γ_2 ist. Desweiteren sei o.B.d.A.

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \neq 0, \pm 1, \quad \text{und} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} a & * \\ * & -a \end{pmatrix}.$$

Wegen $tr(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) = a(\lambda - \lambda^{-1}) = 0$ erhalten wir $a = 0$, was gleichbedeutend damit ist, daß sich der Fixpunkt von γ_3 auf der imaginären Achse, also der Achse von $\gamma_1\gamma_2$, befindet. Wendet man dieselbe Argumentation nochmals auf $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4$ an, so ergibt sich die Behauptung.

Sei jetzt $n > 3$ und wiederum o.B.d.A. $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Sei außerdem i mit $3 \leq i \leq n+1$ beliebig und $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-3}\} \subset \{3, 4, \ldots, n+1\} \backslash \{i\}$ sowie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-3} \in \{-1, 1\}$ so gewählt, daß

$$tr\left(\gamma_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\gamma_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}}\ldots\gamma_{i_{n-3}}^{\varepsilon_{i_{n-3}}}\right) \neq 0$$

(dies ist wieder nach dem ganz zu Anfang Bewiesenen möglich, da $n - 3 \equiv 0 \bmod 2$). Dies impliziert:

$$\begin{aligned} tr(\gamma_1\gamma_2\gamma_i)\, tr\left(\gamma_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\gamma_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}}\ldots\gamma_{i_{n-3}}^{\varepsilon_{i_{n-3}}}\right) &= tr\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_i\gamma_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}\gamma_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}}\ldots\gamma_{i_{n-3}}^{\varepsilon_{i_{n-3}}}\right) + \\ & \quad tr\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_i\gamma_{i_{n-3}}^{-\varepsilon_{i_{n-3}}}\gamma_{i_{n-4}}^{-\varepsilon_{i_{n-4}}}\ldots\gamma_{i_1}^{-\varepsilon_{i_1}}\right) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

und damit $tr\,(\gamma_1\gamma_2\gamma_i) = 0$, woraus wir wie oben erhalten: der Fixpunkt von γ_i liegt auf der Geodätischen durch die Fixpunkt von γ_1 und γ_2.

$\square$

Lemma 2.4 *Sei Γ eine Untergruppe der $PSL(2,\mathbb{R})$ und sei $G \subset \mathbb{H}$ eine Geodätische dergestalt, daß für die Menge $M := \{z \in \mathbb{H}\,|\, z$ ist Fixpunkt eines elliptischen Elements $\gamma \in \Gamma$ der Ordnung 2$\}$ gilt: $G \cap M$ ist diskret in $\mathbb{H}$. Enthält $G \cap M$ mehr als einen Punkt, so wähle $E_1 \in G \cap M$ beliebig und $E_2 \in G \cap M$ mit $d(E_1, E_2) > 0$ minimal (dabei bezeichne d den hyperbolischen Abstand). Sei E_i der Fixpunkt von γ_i, $i = 1, 2$. Dann gilt:*

$$M \cap G = \{z \in \mathbb{H}\,|\, z = (\gamma_2\gamma_1)^k\,(E_i), k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2\}.$$

Beweis: Sei o.B.d.A. G die imaginäre Achse und $E_1 = ia$, $a > 0$, sowie $E_2 = ib$, $b > a$. Sei $z \in G \cap M$ beliebig gewählt. Da $\gamma := \gamma_2\gamma_1$ ein hyperbolisches Element mit Achse G ist und $\gamma(E_1) = \gamma_2(E_1) = ib^2/a$, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit:

$$\gamma^k(z) = ix,\ \text{wobei}\ a \leq x < b^2/a.$$

Falls $x = a$ oder $x = b$, so ist nichts mehr zu zeigen. Wegen der Minimalität von $d(E_1, E_2)$ ist $a < x < b$ nicht möglich und auch $b < x < b^2/a$ führt auf einen Widerspruch, da dies implizieren würde:

$$\gamma_2(ix) = iy,\ \text{mit}\ a < y < b\,,$$

wobei auch $\gamma_2(ix) = \gamma_2\gamma^k(z)$ Fixpunkt eines elliptischen Elementes der Ordnung 2 in Γ wäre.

$\square$

Satz 2.5 *Sei Γ eine Untergruppe der $PSL(2,\mathbb{R})$, in der entweder*

(i) alle elliptischen Elemente $\gamma \in \Gamma^2$ der Ordnung 2 (soweit überhaupt vorhanden) die Gestalt haben: $\gamma = {\gamma_1}^2$, $\gamma_1 \in \Gamma$, oder

(ii) mit $M := \{z \in \mathbb{H}\,|\, z$ ist Fixpunkt eines elliptischen Elementes $\gamma \in \Gamma$ der Ordnung $t \equiv 0 \bmod 4\}$ gilt für jede Geodätische $G \subset \mathbb{H}$:

$$G \cap M \textit{ ist diskret in } \mathbb{H}$$

(diese Bedingung ist z. B. in einer Fuchsschen Gruppe immer erfüllt).
Dann ist:

$$\mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) = \mathbb{Q}\left(tr^2(\gamma)|\gamma \in \Gamma\right).$$

Beweis: Da für alle $\gamma \in \Gamma$ die Spur $tr(\gamma)$ nur bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt ist, müßte im folgenden eigentlich immer von $|tr(\gamma)|$ anstatt von $tr(\gamma)$ die Rede sein. Um der besseren Übersichtlichkeit willen wurde aber darauf verzichtet.
Wegen $tr^2(\gamma) - 2 = tr(\gamma^2)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ (dies folgt z. B. aus Formel (2) von Lemma 2.2 mit $\mathcal{A} = \mathcal{B}$) erhält man sofort:

$$(1) \qquad K := \mathbb{Q}\left(tr^2(\gamma)|\gamma \in \Gamma\right) \subseteq \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)).$$

Alle $\gamma \in \Gamma^2$ lassen sich darstellen als: $\gamma = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i^2$ mit $\gamma_i \in \Gamma,\ i = 1, 2, \ldots, n$.
Wir führen im folgenden Induktion über die Anzahl n der Faktoren γ_i , um die umgekehrte Inklusion von (1) zu zeigen.

Induktionsverankerung $n = 1$:
$tr(\gamma^2) \in K = \mathbb{Q}\left(tr^2(\gamma)|\gamma \in \Gamma\right)$ folgt wieder aus $tr^2(\gamma) - 2 = tr(\gamma^2)$.
Induktionsverankerung $n = 2$:
Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, dann gilt unter Verwendung der Formeln aus Lemma 2.2:

$$\begin{aligned}
tr\left(\gamma_1^2\gamma_2^2\right) &= tr\left(\gamma_1\gamma_2^2\gamma_1\right)\\
&= tr\left(\gamma_1\gamma_2\right)tr(\gamma_2\gamma_1) - tr\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\right)\\
&= tr^2(\gamma_1\gamma_2) - tr\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\right)tr\left(\gamma_2^{-1}\right) + tr\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2\right)\\
&= tr^2(\gamma_1\gamma_2) - tr^2(\gamma_2) + tr(\gamma_1\gamma_2)tr(\gamma_1^{-1}\gamma_2) - tr\left(\gamma_1\gamma_2\gamma_2^{-1}\gamma_1\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{2tr(\gamma_1\gamma_2)tr(\gamma_1^{-1}\gamma_2)\right\} + tr^2(\gamma_1\gamma_2) - tr^2(\gamma_2) - tr(\gamma_1^2)\\
&= \tfrac{1}{2}\Big[\left\{tr\left(\gamma_1\gamma_2\right) + tr\left(\gamma_1^{-1}\gamma_2\right)\right\}^2 - tr^2(\gamma_1\gamma_2) - tr^2\left(\gamma_1^{-1}\gamma_2\right)\Big]\\
&\quad + tr^2(\gamma_1\gamma_2) - tr^2(\gamma_2) - tr(\gamma_1^2)\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{tr^2(\gamma_1)tr^2(\gamma_2) - tr^2(\gamma_1\gamma_2) - tr^2\left(\gamma_1^{-1}\gamma_2\right)\right\} + tr^2(\gamma_1\gamma_2)\\
&\quad - tr^2(\gamma_2) - tr(\gamma_1^2) \in K.
\end{aligned}$$

Induktionsannahme:
Sei die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ wahr.
Induktionsschritt $n \Rightarrow n+1$:
Sei $\gamma \in \Gamma^2$ mit $\gamma = \prod_{i=1}^{n+1} \gamma_i^2$ mit $\gamma_i \in \Gamma,\ i = 1, 2, \ldots, n+1,\ n \geq 2$.

1. Fall: Es existiert eine Teilmenge $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ sowie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ mit:

$$tr\left(\gamma_{i_1}^{2\varepsilon_1}\gamma_{i_2}^{2\varepsilon_2}\ldots\gamma_{i_n}^{2\varepsilon_n}\right) \neq 0.$$

Behauptung: $tr(\gamma) \in K \Leftrightarrow tr\left(\gamma_k^2\gamma_{i_1}^{2\varepsilon_1}\gamma_{i_2}^{2\varepsilon_2}\ldots\gamma_{i_n}^{2\varepsilon_n}\right) \in K$, dabei sei $\{k\} = \{1, 2, \ldots, n+1\} \backslash \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Beweis der Behauptung: Wir nehmen o.B.d.A. an: $k = n + 1$. Wegen

$$\begin{aligned} tr(\gamma) &= tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_i^2 \gamma_{i+1}^2) \\ &= tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2 \gamma_i^2) tr(\gamma_{i+1}^2) - \\ &\quad tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2 {\gamma_i}^2 \gamma_{i+1}^{-2}) \\ &= tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2 \gamma_i^2) tr(\gamma_{i+1}^2) - \\ &\quad tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2) tr(\gamma_i^2 \gamma_{i+1}^{-2}) + \\ &\quad tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2 \gamma_{i+1}^2 {\gamma_i}^{-2}) \\ &= tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2 \gamma_i^2) tr(\gamma_{i+1}^2) - \\ &\quad tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2) tr(\gamma_i^2 \gamma_{i+1}^{-2}) + \\ &\quad tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2 \gamma_{i+1}^2) tr({\gamma_i}^{-2}) - \\ &\quad tr(\gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2 \gamma_{i+1}^2 \gamma_i^2) \end{aligned}$$

gilt nach Induktionsannahme:

$$tr(\gamma) \in K \Leftrightarrow tr(\gamma_1^2 \dots \gamma_{i-1}^2 \gamma_{i+1}^2 \gamma_i^2 \gamma_{i+2}^2 \dots \gamma_{n+1}^2) \in K,$$

und da die Transpositionen benachbarter Elemente die symmetrische Gruppe S_n von n Elementen erzeugen, erhalten wir damit sogar für alle Permutationen $\pi \in S_n$:

$$tr(\gamma) \in K \Leftrightarrow tr(\gamma_{n+1}^2 \gamma_{\pi(1)}^2 \gamma_{\pi(2)}^2 \dots \gamma_{\pi(n)}^2) \in K.$$

Wir teilen jetzt die Menge $\{i_1, \dots, i_n\}$ in zwei disjunkte Teilmengen $M_1 = \{j_1, \dots, j_l\}$ und $M_2 = \{j_{l+1}, \dots, j_n\}$ auf, wobei $i_k \in M_1 \Leftrightarrow \varepsilon_k = 1$. Dann gilt wegen

$$\begin{aligned} tr(\gamma_{n+1}^2 \gamma_{j_1}^2 \dots \gamma_{j_l}^2 \gamma_{j_{l+1}}^{-2} \dots \gamma_{j_n}^{-2}) &= tr(\gamma_{n+1}^2 \gamma_{j_1}^2 \dots \gamma_{j_l}^2) tr(\gamma_{j_{l+1}}^{-2} \dots \gamma_{j_n}^{-2}) - \\ &\quad tr(\gamma_{n+1}^2 \gamma_{j_1}^2 \dots \gamma_{j_l}^2 \gamma_{j_n}^2 \gamma_{j_{n-1}}^2 \dots \gamma_{j_{l+1}}^2) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Induktionsannahme und der oben bewiesenen „Invarianz“ unter Permutationen:

$$\begin{aligned} tr(\gamma) \in K &\Leftrightarrow tr(\gamma_{n+1}^2 \gamma_{j_1}^2 \dots \gamma_{j_l}^2 \gamma_{j_n}^2 \gamma_{j_{n-1}}^2 \dots \gamma_{j_{l+1}}^2) \in K \\ &\Leftrightarrow tr(\gamma_{n+1}^2 \gamma_{j_1}^2 \dots \gamma_{j_l}^2 \gamma_{j_{l+1}}^{-2} \gamma_{j_{l+2}}^{-2} \dots \gamma_{j_n}^{-2}) \in K \\ &\Leftrightarrow tr(\gamma_{n+1}^2 \gamma_{i_1}^{2\varepsilon_1} \gamma_{i_2}^{2\varepsilon_2} \dots \gamma_{i_n}^{2\varepsilon_n}) \in K \end{aligned}$$

(dies gilt auch, wenn M_1 leer ist; verwende dann Formel (1) aus Lemma 2.2). Definiere nun $\alpha := \prod_{j=1}^{n} \gamma_{i_j}^{2\varepsilon_j}$.

Wegen $tr(\alpha) \neq 0$, erhalten wir wieder unter Verwendung der Formeln aus Lemma 2.2:

$$\begin{aligned}
tr(\gamma_{n+1}^2\alpha) &= tr(\gamma_{n+1})tr(\gamma_{n+1}\alpha) - tr\left(\gamma_{n+1}\alpha^{-1}\gamma_{n+1}^{-1}\right) \\
&= tr(\gamma_{n+1})tr(\alpha\gamma_{n+1}) - tr(\alpha) \\
&= tr^{-1}(\alpha)\left\{tr(\alpha)tr(\gamma_{n+1})tr(\alpha\gamma_{n+1})\right\} - tr(\alpha) \\
&= tr^{-1}(\alpha)\left[\left\{tr(\alpha\gamma_{n+1}) + tr\left(\alpha\gamma_{n+1}^{-1}\right)\right\} tr(\alpha\gamma_{n+1})\right] - tr(\alpha) \\
&= tr^{-1}(\alpha)\left\{tr^2(\alpha\gamma_{n+1}) + tr\left(\alpha\gamma_{n+1}^{-1}\right) tr(\alpha\gamma_{n+1})\right\} - tr(\alpha) \\
&= \tfrac{1}{2}\, tr^{-1}(\alpha)\left\{2tr\left(\alpha\gamma_{n+1}^{-1}\right) tr(\alpha\gamma_{n+1}) + tr^2\left(\alpha\gamma_{n+1}^{-1}\right) + tr^2(\alpha\gamma_{n+1})\right\} \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\, tr^{-1}(\alpha)\left\{tr^2\left(\alpha\gamma_{n+1}^{-1}\right) + tr^2(\alpha\gamma_{n+1})\right\} + tr^{-1}(\alpha)tr^2(\alpha\gamma_{n+1}) \\
&\quad -tr(\alpha) \\
&= \tfrac{1}{2}\, tr^{-1}(\alpha)\left\{tr\left(\alpha\gamma_{n+1}^{-1}\right) + tr(\alpha\gamma_{n+1})\right\}^2 + tr^{-1}(\alpha)tr^2(\alpha\gamma_{n+1}) \\
&\quad -tr(\alpha) - \tfrac{1}{2}\, tr^{-1}(\alpha)\left\{tr^2\left(\alpha\gamma_{n+1}^{-1}\right) + tr^2(\alpha\gamma_{n+1})\right\} \\
&= tr^{-1}(\alpha)\{\tfrac{1}{2}\, tr^2(\alpha)tr^2(\gamma_{n+1}) + tr^2(\alpha\gamma_{n+1}) - \tfrac{1}{2}\, tr^2\left(\alpha\gamma_{n+1}^{-1}\right) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}tr^2(\alpha\gamma_{n+1})\} - tr(\alpha).
\end{aligned}$$

Damit folgt nach Induktionsannahme: $tr(\gamma_{n+1}^2\alpha) \in K$ und also auch $tr(\gamma) \in K = \mathbb{Q}(tr^2(\gamma)|\gamma \in \Gamma)$.

2. Fall: Für alle Teilmengen $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ und alle Vektoren $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \ldots n$, gilt:

$$tr\left(\gamma_{i_1}^{2\varepsilon_1}\gamma_{i_2}^{2\varepsilon_2}\ldots\gamma_{i_n}^{2\varepsilon_n}\right) = 0.$$

Ist Voraussetzung (i) in Γ erfüllt, so ergibt sich: $\alpha := \gamma_2^2\gamma_3^2\ldots\gamma_{n+1}^2 \in \Gamma^2$ ist ein elliptisches Element der Ordnung 2, also: $\alpha = \tilde{\gamma}^2$ mit $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ geeignet gewählt. Somit ist $tr(\gamma) = tr(\gamma_1^2\tilde{\gamma}^2)$ und die Induktionsannahme liefert die Behauptung.

Ist Voraussetzung (ii) in Γ erfüllt, so gilt zunächst nach Lemma 2.3: $n \equiv 1 \bmod 2$, $tr(\gamma_i^2) = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n+1$, und die Fixpunkte der γ_i^2 liegen alle auf einer Geodätischen G. Nach Lemma 2.4 existieren dann elliptische Elemente $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$ der Ordnung 2, mit:

$$\gamma_i^2 = (\alpha_1\alpha_2)^{k_i}\,\alpha_{j_i}\,(\alpha_1\alpha_2)^{-k_i}\,,\ i = 1, 2, \ldots, n+1\,,$$

wobei $k_i \in \mathbb{Z}$ und $j_i \in \{1, 2\}$ geeignet gewählt. Daraus erhalten wir wegen $n \equiv 1 \bmod 2$:

$$tr(\gamma) = tr\left((\alpha_1\alpha_2)^{2k}\right),\ k \in \mathbb{Z} \text{ geeignet gewählt,}$$

so daß sich die Behauptung aus der Induktionsannahme ergibt.

$\square$

Bemerkung: Takeuchi [16] liefert einen anderen Beweis für Satz 2.5 für den Fall, daß Γ eine cofinite Fuchssche Gruppe ist.

Wir werden später sehen, daß der Normalisator von Γ^2 in der Gruppe aller Isometrien der oberen Halbebene $Isom(\mathbb{H})$, bezeichnet mit $N(\Gamma^2)$, eine wichtige Rolle bei modularer Einbettbarkeit spielt, so daß wir uns auch kurz mit der Spurmenge $\mathrm{Tr}(N(\Gamma^2))$ befassen wollen. Hier gilt folgendes:

Satz 2.6 *Sei Γ eine cofinite Fuchssche Gruppe, $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma))$ sei ein algebraischer Zahlkörper. Dann ist auch $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(N(\Gamma)))$ ein algebraischer Zahlkörper; insbesondere existiert eine geeignete Konjugation von Γ in der $PSL(2,\mathbb{R})$, so daß sämtliche Matrizen in $N(\Gamma)$ Einträge in einem algebraischen Zahlkörper L besitzen mit $[L:\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma))] \leq 2\cdot 4^{[N(\Gamma):\Gamma]-1}$.*

Beweis: Nach Takeuchi [16] wähle eine geeignete Konjugation von Γ in der $PSL(2,\mathbb{R})$, so daß Γ ein hyperbolisches Element $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{smallmatrix}\right)$, $\lambda > 1$ enthält und $\Gamma \subset PSL(2,K)$ mit $K = \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma),\lambda)$. Sei nun $\tilde{\gamma} \in N(\Gamma)$, o.B.d.A. $\tilde{\gamma} \in PSL(2,\mathbb{R})$ (ansonsten schließe analog). Mit $\tilde{\gamma} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir:

$$\tilde{\gamma}\gamma\tilde{\gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} ad\lambda - bc\lambda^{-1} & ab(\lambda^{-1}-\lambda) \\ cd(\lambda-\lambda^{-1}) & ad\lambda^{-1} - bc\lambda \end{pmatrix} \in PSL(2,K).$$

Somit gilt: $ab, cd \in K$, und durch Betrachten von $\tilde{\gamma}^{-1}\gamma\tilde{\gamma}$ erhält man ebenso: $bd, ac \in K$. Im folgenden müssen wir nun verschiedene Fälle unterscheiden:

i) $a, d = 0 \Rightarrow c = -b^{-1}$. Wähle $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h\end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $g \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h\end{pmatrix}\tilde{\gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} h & -gb^2 \\ -fb^{-2} & e \end{pmatrix} \in PSL(2,K).$$

Folglich gilt: $b^2 \in K$, also $\tilde{\gamma} \in PSL(2,K(b))$ und $[K(b):K] \leq 2$.

(ii) $b, c = 0 \Rightarrow d = a^{-1}$. Wähle wiederum $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h\end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $g \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h\end{pmatrix}\tilde{\gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} e & a^2 f \\ ga^{-2} & h \end{pmatrix} \in PSL(2,K).$$

Folglich gilt: $a^{-2} \in K$, also $\tilde{\gamma} \in PSL(2,K(a))$ und $[K(a):K] \leq 2$.

(iii) $a = 0, d \neq 0$. Wegen $cd, db \in K$ erhalten wir $cddb = -d^2 \in K$ und folglich $\tilde{\gamma} \in PSL(2,K(d))$ sowie $[K(d):K] \leq 2$.

(iv) $b = 0, c \neq 0$ oder $d = 0, c \neq 0$ oder $c = 0, b \neq 0$. Schließe analog zu (iii), daß stets $\tilde{\gamma} \in PSL(2, K')$ mit $[K' : K] \leq 2$.

(v) $a, b, c, d \neq 0$. Wegen $ab, cd, bd \in K$ erhalten wir $abcd = ad(ad-1) \in K$, $adab(bd)^{-1} = a^2 \in K(ad)$ und folglich $\tilde{\gamma} \in PSL(2, K(a))$ sowie $[K(a) : K] \leq 4$.

Sei nun $\mathcal{R} = \{id, \tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2}, \ldots, \tilde{\gamma_n}\}$ ein Repräsentantensystem von $N(\Gamma)/\Gamma$, dann folgt die Behauptung wegen $[K : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma))] \leq 2$ und $N(\Gamma) = < \Gamma, \tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2}, \ldots, \tilde{\gamma_n} >$ unmittelbar aus den vorangegangenen Überlegungen.

□

Korollar 2.7 *Sei Γ eine cofinite Fuchssche Gruppe, $\mathrm{Tr}(\Gamma^2) \subseteq \mathcal{O}_K$, dem Ring ganzer Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K. Dann gilt für die Spurmenge $\mathrm{Tr}(N(\Gamma^2))$ des Normalisators von Γ^2 in der Isom($\mathbb{H}$): $\mathrm{Tr}(N(\Gamma^2)) \subseteq \mathcal{O}_L$, dem Ring ganzer Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers L mit $[L : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))] \leq 2 \cdot 4^{[N(\Gamma^2):\Gamma^2]-1}$.*

Beweis: Nach Satz 2.6 bleibt nur noch zu zeigen: Alle Spuren in $\mathrm{Tr}(N(\Gamma^2))$ sind ganz. Sei nun $\tilde{\gamma} \in N(\Gamma^2)$, o.B.d.A. können wir annehmen, daß $\tilde{\gamma} \in PSL(2, \mathbb{R})$, denn ansonsten ist $\tilde{\gamma}^2 \in N(\Gamma^2) \cap PSL(2, \mathbb{R})$ und wegen $tr(\tilde{\gamma}^2) = tr(\tilde{\gamma})^2 + 2$ genügt es dann zu zeigen: $tr(\tilde{\gamma}^2)$ ist ganz.

Falls $\tilde{\gamma}$ elliptisch oder parabolisch ist, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also $\tilde{\gamma}$ hyperbolisch. Da $[N(\Gamma^2) : \Gamma^2] < \infty$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit: $\tilde{\gamma}^n \in \Gamma^2$. Sei o.B.d.A. $\lambda > 1$ so gewählt, daß $tr(\tilde{\gamma}) = \lambda + \lambda^{-1}$. Folglich:

$$tr(\tilde{\gamma}^n) = \lambda^n + \lambda^{-n} \in \mathcal{O}_K.$$

Daraus ergibt sich sofort: λ, λ^{-1} sind ganz und somit auch $tr(\tilde{\gamma})$.

□

Abschließend wollen wir uns nun noch der Frage zuwenden, wann eine Untergruppe Γ der $PSL(2, \mathbb{R})$ eine Darstellung in ihrem Spurkörper besitzt, das heißt unter welchen Voraussetzungen eine geeignete $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation von Γ existiert, so daß die Koeffizienten aller Matrizen in Γ in $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma))$ liegen. Dazu benötigen wir zunächst folgendes

Lemma 2.8 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}', \mathcal{B}' \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $tr\left(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{A}'^{-1}\mathcal{B}'^{-1}\right) \neq \pm 2$ sowie $tr(\mathcal{A}) = tr(\mathcal{A}')$, $tr(\mathcal{B}) = tr(\mathcal{B}')$ und $tr(\mathcal{AB}) = tr(\mathcal{A}'\mathcal{B}')$. Setze $\alpha := \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$; dann existiert ein $\gamma \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $(\gamma\,\mathcal{A}'\gamma^{-1}, \gamma\,\mathcal{B}'\gamma^{-1}) \in M$, wobei*

$$M := \left\{(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \left(\mathcal{A}^{-1}, \mathcal{B}^{-1}\right), \left(\alpha\mathcal{A}\alpha^{-1}, \alpha\mathcal{B}\alpha^{-1}\right), \left(\alpha\,\mathcal{A}^{-1}\alpha^{-1}, \alpha\,\mathcal{B}^{-1}\alpha^{-1}\right)\right\}.$$

Beweis: 1.Fall: $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sind parabolisch, o.B.d.A. können wir annehmen, daß

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wähle zunächst $\gamma_1 \in SL(2, \mathbb{R})$ mit:

$$\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \gamma_1 \mathcal{B}' \gamma_1^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Wegen $tr\,(\mathcal{B}) = tr\,(\mathcal{B}')$ und $tr\,(\mathcal{A}\mathcal{B}) = tr\,(\mathcal{A}'\mathcal{B}')$ erhalten wir daraus unmittelbar: $c = \pm c'$. Da nach Voraussetzung die Spur des Kommutators $tr\left(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{A}'^{-1}\mathcal{B}'^{-1}\right) \neq \pm 2$ ist, gilt zwingend: $c \neq 0$, so daß eine erneute Konjugation mit $\gamma_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, wobei μ definiert sei als: $\mu := (a - a')\, c^{-1}$, falls $c = c'$, bzw. $\mu := (a' - d)\, c^{-1}$, falls $c = -c'$, liefert:

$$\begin{gathered} \gamma_2\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \gamma_2\gamma_1 \mathcal{B}' \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = \mathcal{B} \\ \text{bzw.} \\ \gamma_2\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \quad \text{und} \quad \gamma_2\gamma_1 \mathcal{B}' \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = \mathcal{B}^{-1}. \end{gathered}$$

2.Fall: $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sind hyperbolisch; sei zunächst

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \text{o.B.d.A. } \lambda > 1, \text{ und } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wähle $\gamma_1 \in SL(2, \mathbb{R})$ mit:

$$\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1} = \mathcal{A}^{\pm 1} \text{ und } \gamma_1 \mathcal{B}' \gamma_1^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Wegen $tr\,(\mathcal{B}) = tr\,(\mathcal{B}')$ und $tr\,(\mathcal{A}\mathcal{B}) = tr\,(\mathcal{A}'\mathcal{B}')$ erhalten wir daraus unmittelbar: $a = a'$, falls $\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$, bzw. $a = d'$, falls $\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$. Da nach Voraussetzung die Spur des Kommutators $tr\left(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{A}'^{-1}\mathcal{B}'^{-1}\right) \neq \pm 2$ ist, gilt zwingend: $b, b' \neq 0$, so daß eine erneute Konjugation mit $\gamma_2 := \left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, wobei μ definiert sei als: $\mu := |b/b'|^{1/2}$ bzw. $\mu := |b'/b|^{1/2}$, liefert:

$$\begin{gathered} \gamma_2\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \gamma_2\gamma_1 \mathcal{B}' \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \in \left\{\mathcal{B}, \alpha\mathcal{B}\alpha^{-1}\right\} \\ \text{bzw.} \\ \gamma_2\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \quad \text{und} \quad \gamma_2\gamma_1 \mathcal{B}' \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \in \left\{\mathcal{B}^{-1}, \alpha\,\mathcal{B}^{-1}\alpha^{-1}\right\}. \end{gathered}$$

Für beliebiges $\mathcal{A}$ erhält man die Behauptung durch Anwenden der obigen Überlegungen auf eine geeignete $SL(2, \mathbb{R})$–Konjugation von $\mathcal{A}$ (die $\mathcal{A}$ auf die

Form $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ bringt) unter Beachtung der Tatsache, daß α im Normalisator der $SL(2,\mathbb{R})$ in der $SL(2,\mathbb{C})$ liegt und $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ bei α–Konjugation sogar invariant bleibt.

3. Fall: $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sind elliptisch, o.B.d.A. können wir im Einheitskreismodell arbeiten und annehmen, daß

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \text{ und } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ \overline{c} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Wähle zunächst γ_1 mit:

$$\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1} = \mathcal{A}^{\pm 1} \text{ und } \gamma_1 \mathcal{B}' \gamma_1^{-1} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ \overline{c'} & \overline{a'} \end{pmatrix}.$$

Wegen $tr\,(\mathcal{B}) = tr\,(\mathcal{B}')$ und $tr\,(\mathcal{AB}) = tr\,(\mathcal{A}'\mathcal{B}')$ erhalten wir daraus unmittelbar: $a = a'$, falls $\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$, bzw. $a = \overline{a'}$, falls $\gamma_1 \mathcal{A}' \gamma_1^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$. In jedem Fall impliziert dies unter Benutzung der Determinantenbedingung $|c| = |c'|$. Da nach Voraussetzung die Spur des Kommutators $tr\left(\mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{A}'^{-1}\mathcal{B}'^{-1}\right) \neq \pm 2$ ist, gilt zwingend: $c, c' \neq 0$, so daß ein eindeutiges θ im Intervall $[0, 2\pi)$ existiert mit:

$$c' \exp(i\theta) = c \quad \text{bzw.} \quad c' \exp(i\theta) = -c.$$

Konjugation mit $\gamma := \left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{smallmatrix}\right)$ liefert dann:

$$\begin{gathered} \gamma \mathcal{A}' \gamma^{-1} = \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \gamma \mathcal{B}' \gamma^{-1} = \mathcal{B} \\ \text{bzw.} \\ \gamma \mathcal{A}' \gamma^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \quad \text{und} \quad \gamma \mathcal{B}' \gamma^{-1} = \mathcal{B}^{-1}. \end{gathered}$$

□

Korollar 2.9 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}', \mathcal{B}' \in SL(2,\mathbb{R})$; dann gilt unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 2.8: $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ lassen sich simultan so in der $SL(2,\mathbb{R})$ konjugieren, daß ihre Konjugate Einträge in demselben Körper wie $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ haben.*

□

Satz 2.10 *Sei Γ eine Untergruppe der $PSL(2,\mathbb{R})$. Seien $\alpha, \beta \in \Gamma$ mit $|tr\,(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})| \neq 2$, und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in SL(2,\mathbb{R})$ Repräsentanten von α bzw. β. Setze $a := tr\,(\mathcal{A})\,, b := tr\,(\mathcal{B})$ und $c := tr\,(\mathcal{AB})$. Dann hat Γ genau dann eine Darstellung im Spurkörper $K := \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\,(\Gamma))$, wenn die Gleichung*

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc - 4 = \left(4 - a^2\right) x^2 + y^2$$

eine Lösung $(x, y) \in K^2$ besitzt.

Beweis: Wir führen den Beweis in der $SL(2,\mathbb{R})$ und damit für $\mathcal{A}$ sowie $\mathcal{B}$ und benutzen hierbei eine Idee von Waterman/MacLachlan [18] (Beweis von Theorem 2). Angenommen, Γ besitze eine Darstellung in K. Dann können wir durch eine geeignete $SL(2,K)$–Konjugation erreichen, daß

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda, e, f, g, h \in K$, $\lambda \neq 0$ und $e + h = b$.

O.B.d.A. sei $g \neq 0$, denn ansonsten wähle $q \in \mathbb{Q}$ mit $\mathcal{A}(q) \notin \{q, \infty\}$ und $\mathcal{B}(q) \neq q$ und setze

$$\gamma := \begin{pmatrix} q & \frac{\mathcal{A}(q)}{q-\mathcal{A}(q)} \\ 1 & \frac{1}{q-\mathcal{A}(q)} \end{pmatrix} \in SL(2,K).$$

Wegen $\gamma(\infty) = q$ und $\gamma(0) = \mathcal{A}(q)$ haben dann $\gamma^{-1}\mathcal{A}\gamma$ und $\gamma^{-1}\mathcal{B}\gamma$ die gewünschte Form.

Damit können wir also $\mathcal{B}$ schreiben als: $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{C}\mathcal{T}^{-1}$ mit

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu^{-1} & b \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \mu \in K$ und $\mu \neq 0$. Eine explizite Berechnung des Matrizenprodukts liefert daraus:

$$\begin{gathered} c = tr(\mathcal{AB}) = -\lambda\mu^{-1} - \alpha^2(\lambda\mu)^{-1} - \mu\lambda^{-1} - b\alpha\lambda^{-1} + a\alpha\mu^{-1} + ab \\ \Leftrightarrow \\ 0 = \alpha^2 + (b\mu - a\lambda)\,\alpha + \mu\lambda\,(c - ab) + \lambda^2 + \mu^2 \end{gathered}$$

Die dadurch beschriebene quadratische Gleichung hat also eine Lösung in K (nämlich α), was gleichbedeutend damit ist, daß die zugehörige Diskriminante eine Quadratzahl in K ist, woraus wir (mit $x \in K$ geeignet gewählt) erhalten:

$$\begin{gathered} (b\mu - a\lambda)^2 - 4\mu\lambda\,(c - ab) - 4\lambda^2 - 4\mu^2 = 4x^2\mu^2 \\ \Leftrightarrow \\ 0 = \left(\tfrac{a^2}{4} - 1\right)(\lambda\mu^{-1})^2 + \left(\tfrac{ab}{2} - c\right)\lambda\mu^{-1} + \tfrac{b^2}{4} - 1 - x^2 \end{gathered}$$

Auch diese quadratische Gleichung hat eine Lösung in K (nämlich $\lambda\mu^{-1}$), so daß wiederum für die zugehörige Diskriminante D gilt: $D = y^2$, mit $y \in K$ geeignet gewählt. Elementare Umformungen zeigen, daß dies zu der folgenden Gleichung äquivalent ist:

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc - 4 = \left(4 - a^2\right)x^2 + y^2\,.$$

Hat diese Gleichung nun andererseits Lösungen $x, y \in K$, so läßt sich der eben beschriebene Weg in die umgekehrte Richtung gehen, und man erhält Matrizen $\tilde{\mathcal{A}}$ sowie $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{T}}\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{T}}^{-1}$ der obigen Gestalt mit Einträgen in K und

$$tr(\tilde{\mathcal{A}}) = tr\,(\mathcal{A})\,,\; tr(\tilde{\mathcal{A}}) = tr\,(\mathcal{A}) \quad \text{und} \quad tr(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{B}}) = tr\,(\mathcal{A}\mathcal{B})\,.$$

Nach Korollar 2.9 existiert damit ein $\gamma \in SL(2, \mathbb{R})$ mit:

$$\gamma\mathcal{A}\gamma^{-1}, \gamma\mathcal{B}\gamma^{-1} \in SL(2, K),$$

und nach einem Resultat von Kern–Isberner/Rosenberger [13] (Korollar 1) ist dies bereits ausreichend für $\gamma\Gamma\gamma^{-1} \subset PSL(2, K)$.

□

Hieraus ergibt sich unmittelbar das folgende überraschende Korollar

Korollar 2.11 *Sei $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ eine nicht–elementare Gruppe, die parabolische Elemente enthalte. Dann besitzt Γ eine Darstellung im Spurkörper $\mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma))$.*

Beweis: Wähle $\alpha \in \Gamma$ parabolisch und $\beta \in \Gamma$ mit $|tr\,(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})\,| \neq 2$. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in SL(2, \mathbb{R})$ Repräsentanten von α bzw. β; dann gilt nach Satz 2.10 mit den dort eingeführten Bezeichnungen wegen $a = \pm 2$: Γ besitzt eine Darstellung in K genau dann, wenn die Gleichung

$$b^2 + c^2 \pm 2bc = (b \pm c)^2 = y^2$$

eine Lösung $y \in K$ besitzt, was offensichtlich der Fall ist.

□

3 Symmetrische Fuchssche Gruppen

3.1 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 3.1 Sei Γ eine cofinite Fuchssche Gruppe.

(i) Die Signatur von Γ wird wie üblich mit $[g; t_1, \ldots, t_n; s]$ angegeben, wobei g das Geschlecht ist, n die Anzahl der nicht–konjugierten elliptischen Elemente der Ordnung t_i, $i = 1, \ldots, n$, angibt und s der Anzahl der nicht-konjugierten Spitzen entspricht.

(ii) Die Signatur einer n–Ecksgruppe wird kurz mit $[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ angegeben (diese Polygongruppen haben Geschlecht Null und Signatur

$[0;t_1,t_2,\ldots,t_n;0]$, wenn $t_1,t_2,\ldots,t_n$ endlich sind; sind einige von ihnen unendlich, so entsprechen sie Spitzen).

Definition 3.2 Sei P ein hyperbolisches n–Eck mit Innenwinkeln π/t_1, π/t_2, …, π/t_n, wobei $t_i \in \mathbb{N}$, $t_i \geq 2$ oder $t_i = \infty$, $i = 1,2,,\ldots,n$. Seien E_i, $i = 1,2,\ldots,n$, die n Ecken von P an den Winkeln π/t_i in natürlicher Anordnung. Sei $S\,(\Gamma) \subset Isom\,(\mathbb{H})$ die Gruppe, die von den hyperbolischen Spiegelungen S_{G_i} an den Geodätischen G_i durch die Punkte E_i und E_{i+1}, $i = 1,2,\ldots,n$ (Indizes modulo n gelesen), erzeugt werde. $S\,(\Gamma)$ ist nach dem Satz von Poincaré diskret und besitzt P als Fundamentalbereich. Desweiteren enthält $S\,(\Gamma)$ mit Index 2 eine Fuchssche n–Ecksgruppe $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$, die von elliptischen bzw. parabolischen Elementen e_i der Ordnung t_i mit Fixpunkten E_i erzeugt wird. Ein Fundamentalbereich von Γ setzt sich aus dem n–Eck P und einem Bild von P, erzeugt durch die Spiegelung an einer Seite, zusammen.

Bemerkung: Wir werden im folgenden diese Gruppen Γ stets als symmetrische Fuchssche Gruppen der Signatur $[t_1,t_2,\ldots,t_n]$ bezeichnen.

Satz 3.1 *Sei Γ eine Fuchssche Gruppe der Signatur $[t_1,t_2,\ldots,t_n]$, also $\Gamma = < e_1,e_2,\ldots,e_{n-1} | e_1^{t_1} = e_2^{t_2} = \ldots = e_{n-1}^{t_{n-1}} = (e_1e_2\ldots e_{n-1})^{t_n} = id >$. Teile die Familie $\mathcal{F} := \{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ in zwei disjunkte Unterfamilien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ auf, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, wobei $t_i \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow t_i \equiv 0 \bmod 2$ oder $t_i = \infty$. Sei $\mathcal{F}_1 = \{t_{i_1},\ldots,t_{i_k}\}$ und $\mathcal{F}_2 = \{t_{i_{k+1}},\ldots,t_{i_n}\}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \Gamma/\,\Gamma^2 &\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k-1} && \text{für } k > 0 \\ \Gamma &= \Gamma^2 && \text{für } k = 0, \end{aligned}$$

und für $k > 0$ wird ein vollständiges Restklassenrepräsentantensystem $\mathcal{R}$ von $\Gamma/\,\Gamma^2$ gegeben durch:

$$\mathcal{R} = \{id, e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_m} | j_1 < j_2 \ldots < j_m,\ \text{wobei}\, t_{j_i} \in \mathcal{F}_1 \backslash \{t_{i_k}\}, m = 1,\ldots,k-1\}.$$

Beweis: Sei zunächst $\mathcal{F}_1 = \emptyset$. Dann gilt offensichtlich $e_i = e_i^{t_i+1} \in \Gamma^2$ für alle $i = 1,2,\ldots,n-1$, so daß $\Gamma = \Gamma^2$.

Sei jetzt $\mathcal{F}_1 \neq \emptyset$. Wir können o.B.d.A. (durch zyklisches Vertauschen der Erzeugenden) annehmen, daß $t_n = t_{i_k} \in \mathcal{F}_1$. Wir wissen, daß gilt:

$$\Gamma/\,\Gamma^2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \text{ für ein geeignetes } n \in \mathbb{N}.$$

Da die $n-1$ Elemente $e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}$ die Gruppe Γ erzeugen und für $t_i \in \mathcal{F}_2$ aus denselben Gründen wie oben gilt: $[e_i]_{\Gamma^2} = [id]_{\Gamma^2}$, wird die abelsche

Gruppe $\Gamma/\,\Gamma^2$ bereits von $[e_j]_{\Gamma^2}$, $t_j \in \mathcal{F}_1 \backslash \{t_n\}$ erzeugt. Damit folgt unmittelbar $n \leq k-1$. Zum Beweis der Gleichheit definiere einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \Gamma \mapsto (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k-1}$ durch

$$\begin{aligned} \psi\,(e_j) &:= (0,0,\ldots,0) \text{ für } t_j \in \mathcal{F}_2 \\ \psi\,(e_j) &:= \varepsilon_l \text{ für } t_j \in \mathcal{F}_1 \text{ und } t_j = t_{i_l},\ j \neq n, \end{aligned}$$

dabei bezeichne ε_l den l-ten Einheitsvektor. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß ψ wohldefiniert ist. Außerdem gilt: $\Gamma^2 \subseteq \ker\psi$, denn alle $\gamma \in \Gamma^2$ lassen sich schreiben als:

$$\gamma = \prod_{i=1}^{l} \gamma_i^2 = \prod_{j=1}^{m} e_{i_j} \text{ mit } \gamma_i \in \Gamma,\ i = 1,2,\ldots,l \text{ und } i_j \in \{1,2,\ldots,n-1\},$$

wobei für $m_i := \#\{e_{i_j} = e_i | j = 1,2,\ldots,m\}$ gilt: $m_i \equiv 0 \bmod 2$, $i = 1,\ldots,n-1$.
Damit folgt sofort aus der Definition von ψ, daß: $\Gamma^2 \subseteq \ker\psi$. Nun ist ψ offensichtlich surjektiv, woraus sich

$$\Gamma/\ker\psi \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k-1}$$

ergibt. Dies impliziert $n \geq k-1$, also $\ker\psi = \Gamma^2$ und somit die erste Behauptung des Satzes. Der Isomorphismus ψ zwischen $\Gamma/\,\Gamma^2$ und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ liefert dann außerdem das angegebene Repräsentantensystems $\mathcal{R}$ für $\Gamma/\,\Gamma^2$.

$\square$

Einige spezielle symmetrische Fuchssche Gruppen wollen wir nun noch etwas genauer betrachten:

Lemma 3.2 (Schmutz Schaller/Wolfart [14]) *Sei Γ eine symmetrische Fuchssche Gruppe der Signatur $[2,2,2,t]$, wobei $t \in \mathbb{N}$, $t > 2$ oder $t = \infty$. Dann gilt mit den Bezeichnungen von Definition 3.2: Die Elemente*

$$x := e_1e_2, \quad y := e_2e_3, \quad z := e_1e_3$$

von Γ sind hyperbolisch, und ihre jeweiligen Achsen enthalten die Seiten von P zwischen E_1 und E_2, zwischen E_2 und E_3 bzw. die Diagonale zwischen E_1 und E_3. Außerdem erfüllen ihre Spuren folgende Gleichungen:
(i) $(tr^2(x)-4)(tr^2(y)-4) = 16\cos^2(\pi/t)$
(ii) $tr^2(x)tr^2(y) = 4\,tr^2(z)$

Bemerkung: Die Spuren $|tr(x)|$, $|tr(y)|$ und $|tr(z)|$ stehen in eineindeutiger Beziehung zu den (hyperbolischen) Längen gewisser Seiten des Vierecks P, genauer gesagt gilt: $|tr(x)| = 2\cosh d\,(E_1,E_2)$, $|tr(y)| = 2\cosh d\,(E_2,E_3)$ und $|tr(z)| = 2\cosh d\,(E_1,E_3)$ (vgl. Beweis von Korollar 3.4).

Lemma 3.3 *Sei a eine positive reelle Zahl. Dann existiert (mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2) bis auf Isometrie genau ein hyperbolisches Viereck mit hyperbolischem Abstand $d(E_1, E_2) = a$ und Innenwinkeln $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$, π/t, wobei $t \in \mathbb{N}$, $t > 2$ oder $t = \infty$.*

Beweis: siehe z. B. Buser [4].

$\square$

Korollar 3.4 *Für alle positiven rellen Zahlen $a > 4$ und für alle $t \in \mathbb{N}$, $t > 2$, oder $t = \infty$ existiert genau eine Vierecksgruppe derart, wie sie in Lemma 3.2 konstruiert wurde, in der gilt:* $\quad tr^2(x) = a$.

Beweis: Für jedes hyperbolische $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ und für alle $E \in \mathbb{H}$ gilt:

$$|tr(\gamma)| \leq 2 \cosh \tfrac{1}{2} d\,(E, \gamma\,(E)),$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn E auf der Achse von γ liegt. Damit ergibt sich: $\cosh d(E_1, E_2) = \cosh \frac{1}{2} d\,(E_1, x\,(E_1)) = \frac{1}{2}|tr(x)|$, und die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 3.3.

$\square$

3.2 Spurkörper symmetrischer Vierecksgruppen der Signatur $[2, 2, 2, t]$

Für die von uns im letzten Unterabschnitt genauer betrachteten symmetrischen Vierecksgruppen lassen sich mit Hilfe der in Abschnitt „Spurkörper und Darstellungkörper“ gewonnenen Erkenntnisse folgende Ergebnisse erzielen:

Korollar 3.5 (Schmutz Schaller/Wolfart [14]) *Sei Γ eine symmetrische Fuchssche Gruppe der Signatur $[2, 2, 2, t]$. Dann gilt mit den Bezeichnungen von Lemma 3.2:*

$$\mathrm{Tr}(\Gamma) \subseteq \mathbb{Z}\,[tr(x), tr(y), tr(z), 2\cos(\pi/t)]\,.$$

Beweis: Dies ist eine leichte Folgerung aus Satz 2.1 (wähle als Erzeugendensystem $\{e_1, e_2, e_3\}$), indem man die Relationen zwischen den Erzeugenden und die Formeln aus Lemma 2.2 verwendet.

Satz 3.6 *Sei Γ eine symmetrische Fuchssche Gruppe der Signatur $[2, 2, 2, t]$. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2:*

$$\mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) = \mathbb{Q}\left(tr^2(x), tr^2(y)\right).$$

Beweis: Betrachte die kanonische Projektion $\pi : SL(2,\mathbb{R}) \mapsto PSL(2,\mathbb{R})$. Wir werden den Beweis nicht für Γ, sondern für $\pi^{-1}(\Gamma) \subseteq SL(2,\mathbb{R})$ führen. Auch $\pi^{-1}(\Gamma)$ wird von drei Elementen $e_1, e_2, e_3 \in SL(2,\mathbb{R})$ (jetzt der Ordnung 4) erzeugt. x, y, z seien mit Hilfe dieser e_1, e_2, e_3 wie in Lemma 3.2 definiert. Unmittelbar klar ist: $\mathbb{Q}\,(tr^2(x), tr^2(y)) \subseteq \mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) = \mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\pi^{-1}\,(\Gamma^2)))$. Nach Satz 2.5 genügt es also zu zeigen:

$$tr^2(\gamma) \in \mathbb{Q}\left(tr^2(x), tr^2(y)\right), \text{ für alle}\, \gamma \in \Gamma.$$

$\Leftrightarrow$ für alle $\sigma \in \mathrm{G} := \mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma))/\mathbb{Q}\,(tr^2(x), tr^2(y)))$ und für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$$\sigma\left(tr^2(\gamma)\right) = tr^2(\gamma).$$

Mit Hilfe der Formeln (i) und (ii) aus Lemma 3.2 erhält man:

$$tr(z) \in \mathbb{Q}\,(tr(x), tr(y)) \quad \text{und} \quad \cos^2(\pi/t) \in \mathbb{Q}\left(tr^2(x), tr^2(y)\right).$$

Somit ergibt sich, daß für den Spurkörper von Γ gilt:

$$\mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma)) = \mathbb{Q}\,(tr(x), tr(y), 2\cos(\pi/t)).$$

Setzen wir $K := \mathbb{Q}\,(tr^2(x), tr^2(y))$, so ist damit $\mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma))$ Zerfällungskörper des Polynoms $p(z) = (z^2 - tr^2(x))\,(z^2 - tr^2(y))\,(z^2 - \cos^2(\pi/t)) \in K[z]$, und infolgedessen ist $\mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma))$ galoissch über K.
Daraus läßt sich auch folgern, daß ord $\mathrm{G} \leqslant 8$ und daß für jedes $\sigma \in \mathrm{G}$ gilt:

$$\sigma\,(tr(x)) = \pm tr(x), \quad \sigma\,(tr(y)) = \pm tr(y), \quad \sigma\,(\cos(\pi/t)) = \pm\cos(\pi/t).$$

Bemerkung: Für $t \equiv 1 \bmod 2$ ist auf jeden Fall ord $\mathrm{G} \leqslant 4$, da dann wegen (φ bezeichne die Eulersche Phi–Funktion)

$$\begin{aligned}\left[\mathbb{Q}\left(\cos^2(\pi/t)\right) : \mathbb{Q}\right] &= [\mathbb{Q}\,(\cos(2\pi/t)) : \mathbb{Q}] = \tfrac{1}{2}\varphi(t) \\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(2t) = [\mathbb{Q}\,(\cos(\pi/t)) : \mathbb{Q}]\end{aligned}$$

gilt: $\sigma\,(\cos(\pi/t))$ ist durch $\sigma\,(\cos^2(\pi/t))$ festgelegt.

Sei nun $\sigma \in \mathrm{G}$ fest gewählt. Zu σ definiere einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \pi^{-1}(\Gamma) \mapsto \pi^{-1}(\Gamma)$ mit $\psi(e_i) = \varepsilon_i\, e_i\,, i = 1, 2, 3,$ und $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ dergestalt, daß:

$$\begin{aligned}(1) \qquad tr\,(\psi(x)) &= \sigma\,(tr(x)) \\ (2) \qquad tr\,(\psi(y)) &= \sigma\,(tr(y)) \\ (3)\; tr\,(\psi(e_1e_2e_3)) &= \sigma\,(\pm 2\cos(\pi/t)) = \sigma\,(tr(e_1e_2e_3))\end{aligned}$$

ψ ist wohldefiniert, da die $\psi(e_i)$ dieselben Relationen (in $SL(2,\mathbb{R})$!) wie die e_i, $i=1,2,3$, erfüllen ($e_i^2=-id, i=1,2,3$, und $(e_1e_2e_3)^t=\pm id$ für $t\neq\infty$). Dies ist für $t\equiv 0 \bmod 2$ offensichtlich; für $t\equiv 1 \bmod 2$ folgt es aus obiger Bemerkung.
So ein ψ läßt sich immer wählen: Dazu setze man zunächst $\psi(e_1):=e_1$; $\psi(e_2)$ und $\psi(e_3)$ ergeben sich dann zwangsläufig aus (1) und (2). Gilt mit dieser Wahl der $\psi(e_i)$, $i=1,2,3$, auch (3), so ist man fertig. Ansonsten setze man $\psi(e_1):=-e_1$, dies führt für die Wahl von $\psi(e_2)$ und $\psi(e_3)$ zu verändertem Vorzeichen, so daß nun auch (3) erfüllt ist.
Unser Ziel ist es nun, im folgenden zu zeigen, daß die Anwendung von σ dieselbe Wirkung auf die Spuren aller Elemente in Γ hat wie die Anwendung von ψ (nämlich höchstens eine Vorzeichenänderung). Dazu sei

$$\gamma\in\pi^{-1}(\Gamma), \gamma=\prod_{j=1}^{n} e_{i_j} \quad \text{mit} \ \ i_j\in\{1,2,3\}.$$

Durch sukzessives Anwenden von (3) aus Lemma 2.2 läßt sich $tr(\gamma)$ nach endlich vielen Schritten als ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ schreiben, in dem nur Spuren von Elementen aus $\pi^{-1}(\Gamma)$, in denen kein e_i, $i=1,2,3$, doppelt auftritt, vorkommen (darauf beruht der Beweis von Satz 2.1). Wegen $tr(e_1e_2e_3)=-tr(e_1e_3e_2)$ und $tr(e_i)=0$, $i=1,2,3$, erhält man auf diese Weise sogar:

$$(1) \qquad tr(\gamma)=p\left(tr(x),tr(y),tr(z),tr(e_1e_2e_3)\right), \quad p\in\mathbb{Z}[X_1,X_2,X_3,X_4].$$

Mit der gleichen Schlußweise gelangt man auch zu dem Ergebnis, daß

$$(2) \qquad tr\left(\psi(\gamma)\right)=p\left(tr\left(\psi(x)\right),tr\left(\psi(y)\right),tr\left(\psi(z)\right),tr\left(\psi(e_1e_2e_3)\right)\right),$$

wobei $p\in\mathbb{Z}[X_1,X_2,X_3,X_4]$, und dieses p ist dasselbe wie in obiger Formel (1). Nach Definition von ψ ist offensichtlich: $tr^2(\gamma)=tr^2\left(\psi(\gamma)\right)$, und außerdem gilt mit einem festen $\varepsilon'\in\{\pm1\}$(verwende (ii) aus Lemma 3.2):

$$\begin{aligned} tr\left(\psi(z)\right) &= \varepsilon_1\varepsilon_3 tr(z) \\ &= \tfrac{1}{2}\varepsilon'\varepsilon_1\varepsilon_3 tr(x)tr(y) \\ &= \tfrac{1}{2}\varepsilon' tr\left(\psi(x)\right)tr\left(\psi(y)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\varepsilon'\sigma\left(tr(x)\right)\sigma\left(tr(y)\right) \\ &= \sigma\left(tr(z)\right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
tr^2(\gamma) &= tr^2(\psi(\gamma)) \\
&= p^2\left(tr(\psi(x)), tr(\psi(y)), tr(\psi(z)), tr(\psi(e_1e_2e_3))\right) \\
&= p^2\left(\sigma(tr(x)), \sigma(tr(y)), \sigma(tr(z)), \sigma(tr(e_1e_2e_3))\right) \\
&= \sigma\left(p^2\left(tr(x), tr(y), tr(z), tr(e_1e_2e_3)\right)\right) \\
&= \sigma\left(tr^2(\gamma)\right).
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.7 *Sei Γ eine symmetrische Fuchssche Gruppe der Signatur $[2,2,2,t]$. Dann gilt:*

$$\Gamma \textit{ ist semiarithmetisch} \Leftrightarrow \mathbb{Q}\left(tr^2(x), tr^2(y)\right) \textit{ ist ein total–reller Zahlkörper, und } tr^2(x) \textit{ sowie } tr^2(y) \textit{ sind ganz über } \mathbb{Z}.$$

Beweis: Wegen Satz 3.6 bleibt nur zu zeigen: Sind $tr^2(x)$ sowie $tr^2(y)$ ganz über $\mathbb{Z}$, so sind bereits die Spuren aller Elemente in Γ^2 ganz. Aus Lemma 3.2 erhält man folgende Beziehung:

$$tr^2(z) = 4\cos^2(\pi/t) + tr^2(x) + tr^2(y) - 4,$$

so daß mit $tr^2(x)$ und $tr^2(y)$ automatisch auch $tr^2(z)$ ganz ist. Nach Satz 3.6 sind dann aber wegen $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ ganz über $\mathbb{Z} \Leftrightarrow a^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ ganz über $\mathbb{Z}$ sogar die Spuren aller Elemente in Γ ganz.

□

Bemerkung: Explizite Beispiele solcher semiarithmetischer Gruppen finden sich in Schmutz Schaller/Wolfart [14] und Ricker [12]. Die letztgenannte Arbeit enthält darüber hinaus eine vollständige Klassifikation (im Hinblick auf modulare Einbettbarkeit) dieser Gruppen der Signaturen $[2,2,2,t]$ mit $t \in \{3,4,6,\infty\}$ für den Fall, daß der Spurkörper $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))$ ein reell–quadratischer Zahlkörper ist.

4 Modulare Einbettungen

4.1 Allgemeine Eigenschaften modularer Einbettungen und modular einbettbarer Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir immer wieder folgende Notation benutzen:

Definition 4.1 Seien $z, w \in \mathbb{H}$ bzw. $z, w \in \mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, dann bezeichnen wir mit $d(z,w)$ den hyperbolischen Abstand von z und w.

Für $z \in \mathbb{H}$ und eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{H}$ (bzw. $z \in \mathbb{E}$ und $M \subset \mathbb{E}$) sei $d(z, M)$ in der üblichen Weise definiert als: $d(z, M) := \inf_{w \in M} d(z, w)$.

Jetzt wollen wir zunächst eine zu der in Abschnitt 1 gegebenen äquivalente Definition modularer Einbettbarkeit einführen:

Satz 4.1 (Schmutz Schaller/Wolfart [14]) *Sei Γ eine cofinite Fuchssche Gruppe. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) Γ ist modular einbettbar.

(ii) Γ ist semiarithmetisch, und es existiert eine geeignete $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation von Γ (im folgenden bezeichnet mit $\check{\Gamma}$), so daß sich für alle Einbettungen $\sigma_j : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma_j(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2, 2]$ die Funktionalgleichung

$$f^{\sigma_j} \circ \gamma(z) = \sigma_j(\gamma) \circ f^{\sigma_j}(z) \ , \ \gamma \in \check{\Gamma}^2$$

durch eine holomorphe Funktion $f^{\sigma_j} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ lösen läßt.

Bemerkung: Die Einschränkung auf eine „geeignete“ $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation in diesem Satz hat zwei Gründe: Erstens ist bei ungünstiger Wahl einer solchen Konjugation eine der relevanten Einbettungen σ möglicherweise nicht so erweiterbar, daß $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, und zweitens kann, selbst wenn dies vermieden wird, das Phänomen auftreten, daß einige Komponentenfunktionen der modularen Einbettung nicht mehr holomorph, sondern nur noch antiholomorph konstruierbar sind (dies ist beispielsweise schon bei Dreiecksgruppen immer dann der Fall, wenn die algebraische Konjugation die Orientierung der drei Fixpunkte umkehrt). Klarheit bringt hier der folgende Satz:

Satz 4.2 *Sei Γ eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe, dann gelten folgende Implikationen:*

(i) Γ ist modular einbettbar, wenn für jede nicht–triviale Einbettung $\sigma_i : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma_i(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2, 2]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, gilt:

Es existiert eine $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation $\Gamma_i^2 := \alpha_i \, \Gamma^2 \, \alpha_i^{-1}$ von Γ^2, für die sich σ_i so zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}_i$ erweitern läßt, daß $\tilde{\sigma}_i(\Gamma_i^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$ und für die die Funktionalgleichung

$$f_i \circ \gamma(z) = \tilde{\sigma}_i(\gamma) \circ f_i(z), \ \text{für alle}\ \gamma \in \Gamma_i^2 \ \text{und für alle}\ z \in \mathbb{H},$$

durch eine holomorphe oder antiholomorphe Funktion f_i lösbar ist.

(ii) Ist Γ modular einbettbar, so ist für jede $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation $\Gamma_i^2 := \alpha_i \, \Gamma^2 \, \alpha_i^{-1}$ von Γ^2, für die sich σ_i so zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}_i$ erweitern läßt, daß $\tilde{\sigma}_i(\Gamma_i^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, die Funktionalgleichung

$$f^{\alpha_i} \circ \gamma(z) = \tilde{\sigma}_i(\gamma) \circ f^{\alpha_i}(z), \ \text{für alle}\ \gamma \in \Gamma_i^2 \ \text{und für alle}\ z \in \mathbb{H},$$

durch eine holomorphe oder antiholomorphe Funktion $f^{\alpha_i} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ lösbar.

Zum Beweis benötigen wir zunächst noch drei Lemmata.

Lemma 4.3 *Sei* Γ *eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe, und sei* $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ *eine nicht–triviale Einbettung, die sich so fortsetzen lasse, daß* $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2,\mathbb{R})$. *Sei desweiteren* $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *eine holomorphe Funktion, die die Funktionalgleichung*

$$f \circ \gamma(z) = \sigma(\gamma) \circ f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ *und alle* $\gamma \in \Gamma^2$ *erfülle. Sei schließlich* $\alpha \in PSL(2,\mathbb{R})$ *mit der Eigenschaft, daß sich* σ *nochmals so zu einer Einbettung* $\tilde{\sigma}$ *fortsetzen lasse, daß* $\tilde{\sigma}(\alpha\Gamma^2\alpha^{-1}) = \tilde{\sigma}(\alpha)\,\sigma(\Gamma^2)\,\tilde{\sigma}(\alpha^{-1}) \subset PSL(2,\mathbb{R})$. *Dann gilt entweder:*

(i) $\tilde{\sigma}(\alpha) \in PSL(2,\mathbb{R})$, *und* $f^\alpha := \tilde{\sigma}(\alpha) \circ f \circ \alpha^{-1} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *ist eine holomorphe Funktion, die die Funktionalgleichung*

$$f^\alpha \circ \gamma(z) = \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f^\alpha(z)$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ *und alle* $\gamma \in \alpha\,\Gamma^2\alpha^{-1}$ *erfüllt,* <u>*oder*</u>

(ii) $\tilde{\sigma}(\alpha) \in \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) PSL(2,\mathbb{R})$, *und* $\overline{f^\alpha} := \overline{\tilde{\sigma}(\alpha) \circ f \circ \alpha^{-1}} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *ist eine antiholomorphe Funktion, die die Funktionalgleichung*

$$\overline{f^\alpha} \circ \gamma(z) = \tilde{\sigma}(\gamma) \circ \overline{f^\alpha}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{H}$ *und alle* $\gamma \in \alpha\,\Gamma^2\alpha^{-1}$ *erfüllt.*

Beweis: Wegen $\tilde{\sigma}(\alpha\,\Gamma^2\alpha^{-1}) = \tilde{\sigma}(\alpha)\,\sigma(\Gamma^2)\,\tilde{\sigma}(\alpha)^{-1} \subset PSL(2,\mathbb{R})$ und wegen $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2,\mathbb{R})$ sieht man, daß $\tilde{\sigma}(\alpha)(\mathbb{R} \cup \infty)$ bezüglich $\sigma(\Gamma^2)$ invariant ist, womit zwingend gilt:

$$\tilde{\sigma}(\alpha)(\mathbb{R} \cup \infty) = \mathbb{R} \cup \infty\,.$$

Daraus erhalten wir:

$$(i)\,\tilde{\sigma}(\alpha) : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H} \quad \text{oder} \quad (ii)\,\tilde{\sigma}(\alpha) : \mathbb{H} \mapsto -\mathbb{H}.$$

Im Fall (i) folgt unmittelbar: $\tilde{\sigma}(\alpha) \in PSL(2,\mathbb{R})$, und f^α bildet die obere Halbebene in die obere Halbebene ab. Darüber hinaus gilt für alle $z \in \mathbb{H}$ und alle $\gamma \in \alpha\,\Gamma^2\alpha^{-1}$ ($\gamma = \alpha\gamma'\alpha^{-1}$, $\gamma' \in \Gamma^2$):

$$\begin{aligned} f^\alpha \circ \gamma(z) &= \tilde{\sigma}(\alpha) \circ f \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ \gamma' \circ \alpha^{-1}(z) \\ &= \tilde{\sigma}(\alpha) \circ f \circ \gamma' \circ \alpha^{-1}(z) \\ &= \tilde{\sigma}(\alpha) \circ \tilde{\sigma}(\gamma') \circ f \circ \alpha^{-1}(z) \\ &= \tilde{\sigma}(\alpha) \circ \tilde{\sigma}(\gamma') \circ \tilde{\sigma}(\alpha)^{-1} \circ \tilde{\sigma}(\alpha) \circ f \circ \alpha^{-1}(z) \\ &= \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f^\alpha(z)\,. \end{aligned}$$

Im Fall (ii) erhalten wir wegen $\det \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) = 1$ und $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$:

$$\tilde{\sigma}(\alpha) \in \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} PSL(2, \mathbb{R}).$$

Damit bildet $f^{\alpha} := \tilde{\sigma}(\alpha) \circ f \circ \alpha^{-1}$ die obere Halbebene in die untere Halbebene ab und genügt offensichtlich der gleichen Funktionalgleichung wie in (i). Daraus ergibt sich nun: $\overline{f^{\alpha}} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ ist antiholomorph und erfüllt für alle $z \in \mathbb{H}$ und alle $\gamma \in \alpha\, \Gamma^2 \alpha^{-1}$ wegen $\tilde{\sigma}(\gamma) \in PSL(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \overline{f^{\alpha}} \circ \gamma(z) &= \overline{f^{\alpha} \circ \gamma(z)} \\ &= \overline{\tilde{\sigma}(\gamma) \circ f^{\alpha}(z)} \\ &= \tilde{\sigma}(\gamma) \circ \overline{f^{\alpha}}(z). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4 *Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedene reelle Zahlen, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Dann existiert ein Polynom $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad $n-1$ mit:*

$$\begin{aligned} P(\alpha_i) &> 0 \quad \textit{für } i = 1, 2, \ldots, k \\ P(\alpha_i) &< 0 \quad \textit{für } i = k+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Beweis: Es existiert sicherlich ein Polynom $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $n-1$ mit:

$$\begin{aligned} Q(\alpha_i) &= 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, k \\ Q(\alpha_i) &= -1 \quad \text{für } i = k+1, \ldots, n \end{aligned}$$

(denn dies beschreibt ein lineares Gleichungssystem mit nicht–verschwindender Vandermondescher Determinante).
Sei $Q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$. Wähle Folgen $\left(a_j{}^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ mit

$$a_j{}^{(m)} \in \mathbb{Q}, \text{ für alle } m \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad \lim_{m \to \infty} a_j{}^{(m)} = a_j.$$

Setze $Q_m(x) := a_{n-1}^{(m)} x^{n-1} + a_{n-2}^{(m)} x^{n-2} + \ldots + a_0^{(m)}$. Wegen

$$\lim_{m \to \infty} Q_m(\alpha_i) = Q(\alpha_i), \text{ für } i = 1, 2, \ldots n,$$

existieren Indizes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} Q_m(\alpha_i) &> 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq m_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \\ Q_m(\alpha_i) &< 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq m_i,\ i = k+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Mit $M := \max_{i=1,\ldots,n} m_i$ erfüllt also $P(x) := Q_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ die geforderten Ungleichungen.

$\square$

Lemma 4.5 *Sei $\gamma_1 \in PSL(2,\mathbb{R})$ hyperbolisch und $\alpha \in PSL(2,\mathbb{R})$ dergestalt, daß $\gamma_2 := \alpha\gamma_1\alpha^{-1}$ und γ_1 keinen gemeinsamen Fixpunkt besitzen. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \left| tr\left(\gamma_1^n \gamma_2^n \gamma_1^{-n} \gamma_2^{-n}\right)\right| = \infty.$$

Beweis: Sei o.B.d.A. $\gamma_1 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, wobei $\lambda \neq 0, \pm 1$. Dann besitzen γ_1 und γ_2 genau dann keinen gemeinsamen Fixpunkt, wenn gilt:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } abcd \neq 0.$$

Eine einfache Rechnung zeigt jetzt, daß für $\gamma_n := \gamma_1^n \gamma_2^n \gamma_1^{-n} \gamma_2^{-n}$ gilt:

$$tr(\gamma_n) = abcd\left(\left(1-\lambda^{-2n}\right)^2 + \left(1-\lambda^{2n}\right)^2\right) + 2\left(ad\lambda^{2n} - bc\right)\left(ad\lambda^{-2n} - bc\right),$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

$\square$

Beweis von Satz 4.2: (i) Als erstes beweisen wir, daß stets eine geeignete $PSL(2,\mathbb{R})$–Konjugation von Γ existiert, so daß für jede Fortsetzung einer jeden Einbettung $\sigma_i : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, simultan gilt: $\sigma_i(\Gamma^2) \subset PSL(2,\mathbb{R})$.

Nach Takeuchi [16] (siehe Schlußbemerkung (iv) in Abschnitt 1) können wir immer erreichen, daß

$$\Gamma^2 \subset PSL(2,K) \text{ mit } K = \mathbb{Q}\left(\mathrm{Tr}(\Gamma^2), \sqrt{tr^2(\gamma) - 4}\right),$$

für beliebiges hyperbolisches $\gamma \in \Gamma^2$. Demnach genügt es zu zeigen: Es existiert ein hyperbolisches $\gamma \in \Gamma^2$, so daß für alle Einbettungen σ_i gilt:

$$|\sigma_i(tr(\gamma))| > 2,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Wähle dazu $\gamma_1 \in \Gamma^2$ hyperbolisch und $\gamma_2 = \alpha\gamma_1\alpha^{-1} \in \Gamma^2$ so, daß γ_1 und γ_2 keinen gemeinsamen Fixpunkt haben. Sei o.B.d.A.

$$|\sigma_i(tr(\gamma_1))| > 2 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, l$$
und
$$|\sigma_i(tr(\gamma_1))| < 2 \text{ für } i = l+1, \ldots, k.$$

Nach Lemma 4.5 existieren dann $n_1, n_2, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ mit:

$$\left|\sigma_i\left(tr\left(\gamma_1^n\gamma_2^n\gamma_1^{-n}\gamma_2^{-n}\right)\right)\right| > 2, \text{ für } i = 1, 2, \ldots, l \text{ und alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_i.$$

Definiere nun $N := \max\limits_{i=1,2,\ldots,l} n_i$ und setze $\gamma := \gamma_1^N\gamma_2^N\gamma_1^{-N}\gamma_2^{-N}$, also:

$$|\sigma_i(tr(\gamma))| > 2 \text{ für } i = 1, 2, \ldots, l.$$

Wegen $\sigma_i(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2, 2]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, können wir (nach einer geeigneten $PSL(2, \mathbb{R})$– Konjugation) jeweils annehmen, daß $\sigma_i(\Gamma^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$. Für $i = l+1, \ldots, n$ sind dann die Elemente $\sigma_i(\gamma_1)$ und $\sigma_i(\gamma_2)$ nach Konstruktion elliptisch und haben verschiedene Fixpunkte. Das gilt natürlich auch für $\sigma_i\left(\gamma_1^N\right)$ und $\sigma_i\left(\gamma_2^N\right)$; da das Kommutatorprodukt solcher Elemente stets hyperbolisch ist (siehe z. B. Beweis von Theorem 2.4.1 in Katok [10]), ergibt sich:

$$|\sigma_i(tr(\gamma))| > 2 \text{ für } i = l+1, \ldots, k.$$

$\gamma \in \Gamma^2$ besitzt also die gewünschten Eigenschaften.

Sei jetzt Γ o.B.d.A. schon so gewählt, daß für jede Fortsetzung $\tilde{\sigma}_i$ von σ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ gilt: $\tilde{\sigma}_i(\Gamma^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$. Nach Lemma 4.3 sind damit für $i = 1, 2, \ldots, k$

$$f_i^* := \tilde{\sigma}(\alpha_i)^{-1} \circ f_i \circ \alpha_i : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}, \text{ falls } \tilde{\sigma}(\alpha_i) : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$$
$$\text{bzw.}$$
$$f_i^* := \overline{\tilde{\sigma}(\alpha_i)^{-1} \circ f_i} \circ \alpha_i : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}, \text{ falls } \tilde{\sigma}(\alpha_i) : \mathbb{H} \mapsto -\mathbb{H}$$

holomorphe bzw. antiholomorphe Funktionen, die die Funktionalgleichung

$$f_i^* \circ \gamma(z) = \tilde{\sigma}_i(\gamma) \circ f_i^*(z)$$

für alle $\gamma \in \Gamma^2$ und für alle $z \in \mathbb{H}$ erfüllen. Sei o.B.d.A. f_i^* holomorph für $i = 1, 2, \ldots, m$ und antiholomorph für $i = m+1, \ldots, k$.

Zum Beweis der modularen Einbettbarkeit von Γ bleibt nach Satz 4.1 jetzt noch zu zeigen: Γ läßt sich ein weiteres Mal so in der $PSL(2, \mathbb{R})$ konjugieren, daß alle sich aus den f_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k$, ergebenden Funktionen, die die entsprechende Funktionalgleichung für die konjugierte Gruppe erfüllen, holomorph werden. Sei dazu $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, und wähle nach Lemma 4.4 ein Polynom $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mit:

$$\sigma_i(P(\alpha)) = P(\sigma_i(\alpha)) > 0 \text{ für i=1,2,\ldots,m}$$
$$\text{und}$$
$$\sigma_i(P(\alpha)) = P(\sigma_i(\alpha)) < 0 \text{ für i=m+1,\ldots,k.}$$

Setze nun:

$$\beta := \begin{pmatrix} \sqrt{P(\alpha)} & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{P(\alpha)}\right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion gilt für jede Fortsetzung von σ_i auf β:

$$\sigma_i(\beta) : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}, \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\text{und}$$

$$\sigma_i(\beta) : \mathbb{H} \mapsto -\mathbb{H}, \quad \text{für } i = m+1, \ldots, k.$$

Somit ist die Gruppe $\beta\,\Gamma\beta^{-1}$ modular einbettbar via der nunmehr sämtlich holomorphen Funktionen $\sigma_i(\beta)\, f_i^* \beta^{-1}$, für $i = 1, 2, \ldots, m$, und $\overline{\sigma_i(\beta)\, f_i^* \beta^{-1}}$, für $i = m+1, \ldots, k$.

(ii) Sei jetzt umgekehrt Γ modular einbettbar und Γ o.B.d.A. schon so konjugiert, daß die Funktionalgleichungen

$$f_i \circ \gamma(z) = \sigma_i(\gamma) \circ f_i(z), \text{ für i=1,2,\ldots,k},$$

für alle $\gamma \in \Gamma^2$ und alle $z \in \mathbb{H}$ durch holomorphe Funktionen f_i lösbar sind. Sei $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ beliebig. Ist $\alpha\,\Gamma\alpha^{-1}$ eine $PSL(2,\mathbb{R})$–Konjugation von Γ, für die sich σ_i ebenfalls so erweitern läßt, daß $\sigma_i(\alpha\,\Gamma^2\alpha^{-1}) \subset PSL(2,\mathbb{R})$, so können wir nach Lemma 4.3 schließen, daß entweder $f^{\alpha_i} := \sigma_i(\alpha) \circ f_i \circ \alpha^{-1}$ oder $f^{\alpha_i} := \overline{\sigma_i(\alpha) \circ f_i \circ \alpha^{-1}}$ (σ_i entsprechend fortgesetzt) eine holomorphe bzw. antiholomorphe Funktion ist, die die obere Halbebene in sich abbildet und die gewünschte Funktionalgleichung für die konjugierte Gruppe $\alpha\,\Gamma\alpha^{-1}$ erfüllt.

□

Wenn es auch sehr schwer ist, die modulare Einbettbarkeit einer semiarithmetischen Fuchsschen Gruppe nachzuweisen, so gibt es jedoch eine Reihe von Kriterien, die eine solche Gruppe auf jeden Fall erfüllen muß und die es somit erlauben, von vorneherein aus der Reihe der in Frage kommenden „Kandidaten“ einen (mehr oder weniger großen) Teil auszusondern.

Satz 4.6 (Schmutz Schaller/Wolfart [14]) *Sei Γ eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe, die eine modulare Einbettung erlaubt. Dann gilt: Für alle nicht–trivialen Einbettungen*

$$id \neq \sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$$

ist die Punktmenge $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))$ nicht–diskret und es ist

$$|\sigma(tr(\gamma))| < |tr(\gamma)|$$

für jedes hyperbolische Element $\gamma \in \Gamma^2$.

Insbesondere erhalten wir daraus:

Satz 4.7 (Schmutz Schaller/Wolfart [14]) *Sei Γ eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe, die eine modulare Einbettung erlaubt. Dann gilt:*
Für alle nicht–trivialen Einbettungen

$$id \neq \sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$$

ist $\sigma(\Gamma^2)$ keine Fuchssche Gruppe.

Die in Satz 4.6 erwähnte Eigenschaft, daß in modular einbettbaren Gruppen die algebraische Konjugation stets alle Spuren hyperbolischer Elemente betragsmäßig verringern muß, läßt sich unter gewissen Zusatzbedingungen an die Gruppe verschärfen. Dazu brauchen wir aber zunächst noch einige Vorbereitungen:

Lemma 4.8 *Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.1 gilt: Jede der Komponentenfunktionen $f^{\sigma_j} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $j = 1, \dots n$, ist surjektiv.*

Vorerst wollen wir aber weniger zeigen, nämlich:

Lemma 4.9 *Sei Γ eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe, die eine modulare Einbettung erlaubt. Sei $id \neq \sigma_j : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine Einbettung des Spurkörpers mit $\sigma_j(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$, und sei $\gamma \in \Gamma^2$ hyperbolisch mit $\sigma_j(\gamma)$ elliptisch. Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.1 gilt dann für den Fixpunkt $E \in \mathbb{H}$ von $\sigma_j(\gamma)$:*

$$E \in f^{\sigma_j}(\mathbb{H}) .$$

Beweis: Wähle $\tilde{\gamma} \in \Gamma^2$ mit $\sigma_j(\tilde{\gamma})$ hyperbolisch (so ein Element muß existieren, da nach Voraussetzung $\sigma_j(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$). Setze

$$K_n := \{z \in \mathbb{H} \,|\, d(z, E) = d(\sigma_j(\tilde{\gamma})^n (E), E)\}, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Wäre $f^{\sigma_j}(\mathbb{H}) \cap K_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ergäbe sich:

$$f^{\sigma_j}(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} K_n.$$

Da $f^{\sigma_j}(\mathbb{H})$ zusammenhängend ist, impliziert dies:

$$f^{\sigma_j}(\mathbb{H}) \subseteq \{z \in \mathbb{H} \,|\, d(\sigma_j(\tilde{\gamma})^m (E), E) < d(z, E) < d\left(\sigma_j(\tilde{\gamma})^{m+1} (E), E\right)\}$$

für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}_0$.
Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} f^{\sigma_j}(\tilde{\gamma}^n(E)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Also: es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{\sigma_j}(\mathbb{H}) \cap K_n \neq \emptyset$. Falls $n = 0$, so ist nichts mehr zu zeigen. Ansonsten sei $z \in \mathbb{H}$ mit $f^{\sigma_j}(z) \in K_n$. Da $\sigma_j(\gamma)$ ein elliptisches Element unendlicher Ordnung ist, liegt die Menge $\{f^{\sigma_j}(\gamma^k(z)) = \sigma_j(\gamma)^k(f^{\sigma_j}(z)) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dicht auf K_n, und da f^{σ_j} offen ist, erhalten wir sogar:

$$K_n \subseteq f^{\sigma_j}(\mathbb{H}),$$

insbesondere also $\sigma_j(\tilde{\gamma})^n(E) = f^{\sigma_j}(z_0)$ für ein geeignetes $z_0 \in \mathbb{H}$. Damit ergibt sich aber unmittelbar:

$$E = \sigma_j(\tilde{\gamma})^{-n}\sigma_j(\tilde{\gamma})^n(E) = \sigma_j(\tilde{\gamma})^{-n}(f^{\sigma_j}(z_0)) = f^{\sigma_j}(\tilde{\gamma}^{-n}(z_0)) \in f^{\sigma_j}(\mathbb{H}).$$

□

Nun aber zum

Beweis von Lemma 4.8: Es muß ein hyperbolisches $\gamma \in \Gamma^2$ existieren mit $\sigma_j(\gamma)$ elliptisch, denn sonst betrachte man eine torsionsfreie Untergruppe Γ' von endlichem Index in Γ^2 (diese existiert, siehe z. B. Fox [6] und Mennicke [9]). Würde $\sigma_j(\Gamma')$ keine elliptischen Elemente enthalten, so wäre $\sigma_j(\Gamma')$ im Widerspruch zu Satz 4.7 diskret.

Nun sei $E \in \mathbb{H}$ der Fixpunkt von $\sigma_j(\gamma)$, $\tilde{\gamma} \in \Gamma^2$ wie im Beweis von Lemma 4.9 und $z \in \mathbb{H}$ beliebig gewählt: Da für die Folge mit den Gliedern $a_n := d(\sigma(\tilde{\gamma})^n(E), E)$ gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit:

$$d(z, E) < d(\sigma(\tilde{\gamma})^m(E), E).$$

Sei $\delta : [0,1] \mapsto \mathbb{H}$ ein Weg mit $\delta(0) = z_0$ und $\delta(1) = \tilde{\gamma}^m(z_0)$, wobei $z_0 \in \mathbb{H}$ nach Lemma 4.9 so gewählt sei, daß $f^{\sigma_j}(z_0) = E$. Definiere eine stetige Funktion $\psi(t) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ durch:

$$\psi(t) := d(f^{\sigma_j}(\delta(t)), E).$$

Dann muß nach dem Zwischenwertsatz ein $t' \in [0,1)$ existieren mit: $\psi(t') = d(z,E)$ bzw. ein $z_1 \in \mathbb{H}$ mit: $d(f^{\sigma_j}(z_1), E) = d(z,E)$. Nun liegt die Menge $\{f^{\sigma_j}(\gamma^k(z_1)) = \sigma_j(\gamma)^k(f^{\sigma_j}(z_1)) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq f^{\sigma_j}(\mathbb{H})$ dicht auf dem Kreis $K := \{w \in \mathbb{H} \mid d(w,E) = d(z,E)\}$, und da f^{σ_j} offen ist, erhalten wir:

$$z \in K \subseteq f^{\sigma_j}(\mathbb{H}).$$

□

Jetzt wollen wir uns vorerst noch das lokale Verhalten von modularen Einbettungen in der Nähe elliptischer Fixpunkte genauer ansehen.

Lemma 4.10 *Sei Γ eine modular einbettbare Fuchssche Gruppe. Ist $\gamma_0 \in \Gamma^2$ elliptisch mit $tr(\gamma_0) = 2\cos\pi/t$ und $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine Einbettung mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2,2]\,, \sigma(\cos\pi/t) = \cos k\pi/t\,, 1 < k < t$, so nimmt die zu σ gehörende Komponente f der modularen Einbettung den Wert $f(z_0)$ am Fixpunkt $z_0 \in \mathbb{H}$ von $\tilde{\gamma}$ mit einer Multiplizität $m \equiv k \bmod t$ an. Dabei ist $f(z_0) \in \mathbb{H}$ der Fixpunkt von $\sigma(\gamma_0)$.*

Betrachtet man die Situation im Einheitskreismodell, so läßt sich o.B.d.A. annehmen, daß $z_0 = f(z_0) = 0$, und man erhält $f(z) = z^k g(z^t)$ mit einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$. Hierbei bezeichne $\mathbb{E}$ wieder die offene Einheitskreisscheibe, $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, daß erstens $\Gamma^2 \subset PSL(2,K)$, K ein total–reeller algebraischer Zahlkörper, und zweitens σ bereits zu einer Einbettung von $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ erweitert ist. Dann gilt für alle $\gamma \in \Gamma^2$:

$$f(\gamma(z)) = \sigma(\gamma)(f(z)), \ z \in \mathbb{H}.$$

Insbesondere also für $z = z_0$ und $\gamma = \gamma_0 : f(z_0) = f(\gamma_0(z_0)) = \sigma(\gamma_0)(f(z_0))$. Demnach ist $f(z_0)$ der eindeutig bestimmte Fixpunkt von $\sigma(\gamma_0)$ in der oberen Halbebene.

Behauptung: Es existiert ein $\alpha \in PSL(2,\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\alpha\gamma_0\alpha^{-1}$ besitzt $i \in \mathbb{H}$ als Fixpunkt.
(ii) alle Matrixeinträge von α liegen in dem total–reellen algebraischen Zahlkörper $K(\sin(\pi/t), \cos(\pi/t))$.

Beweis der Behauptung: O.B.d.A. beschreibe γ_0 eine Drehung im positiven Sinn. Betrachte folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \gamma_0 = \begin{pmatrix} \cos(\pi/t) & \sin(\pi/t) \\ -\sin(\pi/t) & \cos(\pi/t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten von $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix}\right)$ mit Lösungen in $L := K(\cos(\pi/t), \sin(\pi/t))$. Da die $PSL(2,\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene transitiv operiert, muß eine Lösung existieren, so daß sich die Behauptung ergibt.

Nun läßt sich leicht nachrechnen (vergleiche Beweis von Lemma 4.15), daß $\tilde{f} := \sigma(\alpha) \circ f \circ \alpha^{-1}$ die zu σ gehörende Komponente der modularen Einbettung der konjugierten Gruppe $\tilde{\Gamma} := \alpha\Gamma\alpha^{-1}$ ist. Offensichtlich hat nicht nur $\tilde{\gamma_0} := \alpha\gamma_0\,\alpha^{-1}$, sondern auch $\sigma(\tilde{\gamma_0})$ den Fixpunkt $i \in \mathbb{H}$. Indem wir zum Einheitskreismodell übergehen, erhalten wir:

$$\tilde{\gamma_0}(z) = \exp(2\pi i/t)\, z \quad \text{und} \quad \sigma(\tilde{\gamma_0})(z) = \exp(2\pi i k/t)\, z\,.$$

Sei nun $\tilde{f}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von $\tilde{f}$ im Einheitskreis. Jetzt schreibt sich die Funktionalgleichung $\tilde{f}(\tilde{\gamma_0}(z)) = \sigma(\tilde{\gamma_0})(\tilde{f}(z))$, $z \in \mathbb{E}$, als:

$$\begin{array}{lrcl} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(2\pi i n/t)\, z^n & = & \displaystyle\exp(2\pi i k/t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ \Rightarrow & \exp(2\pi i n/t)\, a_n & = & \exp(2\pi i k/t)\, a_n \quad \text{, für alle } n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow & a_n & = & 0 \quad \text{für } n \not\equiv k \bmod t. \end{array}$$

Es gilt also $\tilde{f}(z) = z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{tn+k} z^{tn}$. Setzt man nun $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{tn+k} z^n$, so erhalten wir, wie behauptet, $\tilde{f}(z) = z^k g(z^t)$ mit einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$.

$\square$

Satz 4.11 *Sei Γ eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe, die eine modulare Einbettung erlaubt. Sei $\gamma \in \Gamma^2$ hyperbolisch, mit Eigenwert $\lambda > 1$. Sei $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine nicht–triviale Einbettung. Dann gilt:*

(i) Enthält Γ^2 elliptische Elemente γ_k mit Fixpunkt $E_k \in \mathbb{H}$ und mit $\sigma(tr(\gamma_k)) \neq tr(\gamma_k)$, $k \in \mathbb{N}$, so gilt für den Eigenwert $\sigma(\lambda)$ von $\sigma(\gamma)$, $|\sigma(\lambda)| \geq 1$:

$$|\sigma(\lambda)| < \left(\frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^{-2}) + \frac{c}{1+c^2}(\lambda^2 - \lambda^{-2})\right)^{1/2},$$

hierbei ist c definiert als: $c := \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \tanh d(E_k, Achse(\gamma))$.

(ii) Enthält Γ^2 keine elliptischen Elemente, aber ist Γ^2 cokompakt, so gilt mit denselben Bezeichnungen wie in (i):

$$|\sigma(\lambda)| \leq \left(\frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^{-2}) + \frac{\tilde{c}}{1+\tilde{c}^2}(\lambda^2 - \lambda^{-2})\right)^{1/2},$$

hierbei ist $\tilde{c}$ definiert als: $\tilde{c} := \inf\limits_{\alpha\in N(\Gamma^2)} \max\limits_{z\in F} \tanh d(z, Achse(\alpha\gamma\alpha^{-1}))$, wobei $N(\Gamma^2)$ wieder den Normalisator von Γ^2 in der $Isom(\mathbb{H})$ und $F \subset \mathbb{H}$ einen beliebigen Fundamentalbereich von Γ^2 bezeichne.

Beweis: (i) Wir führen den Beweis im Einheitskreismodell und setzen o.B.d.A. voraus, daß $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2,2]$ (ansonsten sind die Behauptungen trivialerweise erfüllt). Sei E_1 der elliptische Fixpunkt von $\gamma_1 \in \Gamma^2$. Nach Lemma 4.10 können wir o.B.d.A. annehmen, daß $E_1 = 0$, und ebenfalls aus Lemma 4.10 wissen wir, daß dann für die σ zugeordnete Komponente f der modularen Einbettung nach Voraussetzung gilt: $f(0) = f'(0) = 0$. Setze:

$$\psi(z,f) := \frac{(1-|z^2|)\,|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\,,\; z \in \mathbb{E}.$$

Nach Beardon [2] gilt:

$$d(f(z), f(w)) < \log(\cosh(d(z,w)) + \psi(z,f)\sinh(d(z,w)))\;,\; z,w \in \mathbb{E}.$$

Ein Resultat von Yamashita [19] liefert außerdem folgende Abschätzung:

$$\psi(z,f) \leq \frac{\psi(0,f)(1+|z|^2)+2|z|}{1+|z|^2+2\psi(0,f)\,|z|}\,,\; z \in \mathbb{E}.$$

Desweiteren gilt für jedes hyperbolische $\gamma \in PSL(2,\mathbb{R})$ und für alle $z \in \mathbb{H}$:

$$|tr(\gamma)| \leq 2\cosh \tfrac{1}{2}\, d(z,\gamma(z))\,,$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn z auf der Achse von γ liegt. Sei nun $z \in \mathrm{Achse}(\gamma)$ beliebig, dann erhalten wir unter Verwendung der obigen Ergebnisse wegen $\psi(0,f) = 0$:

$$\begin{aligned}
|\sigma(tr(\gamma))| &\leq 2\cosh \tfrac{1}{2}\, d(\sigma(\gamma)f(z), f(z)) \\
&= 2\cosh \tfrac{1}{2}\, d(f(\gamma z), f(z)) \\
&< 2\cosh \tfrac{1}{2}\, \log(\cosh d(z,\gamma z) + \psi(z,f)\sinh d(z,\gamma z)) \\
&\leq 2\cosh \tfrac{1}{2}\, \log\Big(\cosh d(z,\gamma z) + \tfrac{2|z|}{1+|z|^2}\sinh d(z,\gamma z)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Setzt man $\omega := \frac{2|z|}{1+|z|^2}$, so ergibt sich daraus unmittelbar:

$$|\sigma(tr(\gamma))| < (\cosh d(z,\gamma z) + \omega\sinh d(z,\gamma z))^{\frac{1}{2}} + (\cosh d(z,\gamma z) + \omega\sinh d(z,\gamma z))^{-\frac{1}{2}}$$

Also:

$$\begin{aligned}
|\sigma(\lambda)| &< (\cosh d(z,\gamma z) + \omega\sinh d(z,\gamma z))^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\, tr^2(\gamma) - 1 + \omega\left(\left(\tfrac{1}{2}\, tr^2(\gamma) - 1\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \lambda^{-2}\right) + \frac{\omega}{2}\left(\lambda^2 - \lambda^{-2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Wegen $|z| = \tanh d(0, z) = \tanh d(E_1, z)$ und da die obigen Betrachtungen für alle $z \in \text{Achse}(\gamma)$ sowie jeden elliptischen Fixpunkt E_k, $k \in \mathbb{N}$, gültig sind, folgt die Behauptung.

(ii) Sei $F \subset \mathbb{H}$ ein Fundamentalbereich von Γ^2, f die σ zugeordnete der modularen Einbettung und $z_0 \in F$ mit $f'(z_0) = 0$. So ein z_0 muß existieren, da sonst wegen der Surjektivität von f nach Lemma 4.8 und wegen des einfachen Zusammenhangs von $\mathbb{H}$ gelten müßte: $f \in PSL(2, \mathbb{R})$, was für die zu $\sigma \neq id$ gehörige Komponente einer modularen Einbettung nicht möglich ist. Wähle $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ mit:

$$M := \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (z_0) = i.$$

Wähle außerdem Folgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ und $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2\pi\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ und $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$. Da $M_n := \left(\begin{smallmatrix} r_n & 0 \\ 0 & r_n{}^{-1} \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{smallmatrix}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nur Einträge in einem total–reellen algebraischen Zahlkörper besitzt, sind auch alle Gruppen $M_n \Gamma M_n^{-1}$ modular einbettbar und die zu σ gehörende Komponente der modularen Einbettung ist jeweils gegeben durch $f_n := \sigma^{(n)}(M_n) \circ f \circ M_n^{-1}$ (vergleiche Beweis von Lemma 4.15); hierbei bezeichne $\sigma^{(n)}$ eine beliebige Fortsetzung von σ auf die Koeffizienten von M_n.
Wir wollen im folgenden die Situation im Einheitskreis betrachten und um der besseren Lesbarkeit willen die Bezeichnungen f, f_n, z_0 und M_n bzw. $\sigma^{(n)}(M_n)$ beibehalten. Sei jetzt $z \in Achse(\gamma)$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von (ii) unter Verwendung des dort zitierten Ergebnisses von Yamashita [19]:

$$\lim_{n\to\infty} \psi(M_n(z), f_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(0, f_n)(1 + |M_n(z)|^2) + 2|M_n(z)|}{1 + |M_n(z)|^2 + 2\psi(0, f_n)|M_n(z)|}.$$

Desweiteren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \psi(0, f_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f_n{}'(0)}{1 - |f_n(0)|^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sigma^{(n)}(M_n)' \circ f \circ M_n{}^{-1}(0)\right)\left(f'(M_n^{-1}(0))\right) M_n{}^{-1\prime}(0)}{1 - \left|\sigma^{(n)}(M_n) \circ f \circ M_n{}^{-1}(0)\right|^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\lim_{n\to\infty} f'(M_n^{-1}(0)) = f'(M^{-1}(0)) = f'(z_0) = 0$, die beiden anderen Faktorenfolgen im Zähler betragsmäßig beschränkt sind und auch der Nenner offensichtlich durch eine positive Konstante nach unten abgeschätzt werden kann. Also:

$$\lim_{n\to\infty} \psi\left(M_n\left(z\right), f_n\right) \quad\leq\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2|M_n\left(z\right)|}{1+|M_n\left(z\right)|^2}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2|M_n\left(z\right)|}{1+|M_n\left(z\right)|^2} &= \frac{2|M\left(z\right)|}{1+|M\left(z\right)|^2} = \frac{2\tanh d\left(0, M\left(z\right)\right)}{1+\tanh^2 d\left(0, M\left(z\right)\right)} \\ &= \frac{2\tanh d\left(z_0,z\right)}{1+\tanh^2 d\left(z_0,z\right)}\,.\end{aligned}$$

Somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\psi\left(M_n\left(z\right), f_n\right) \leq \frac{2\tanh d\left(z_0,z\right)}{1+\tanh^2 d\left(z_0,z\right)} + \varepsilon.$$

Nun ergibt sich analog zum Beweis von (i) mit $g_n\left(z\right) := f_n\left(M_n\left(z\right)\right)$ und $\omega := \psi\left(M_n\left(z\right), f_n\right)$:

$$\begin{aligned}\left|tr\left(\sigma^{(n)}\left(M_n\gamma M_n^{-1}\right)\right)\right| &\leq 2\cosh\tfrac{1}{2}\, d\left(\sigma^{(n)}\left(M_n\gamma M_n^{-1}\right)\left(g_n\left(z\right)\right), g_n\left(z\right)\right) \\ &= 2\cosh\tfrac{1}{2}\, d\left(g_n\left(\gamma z\right), g_n\left(z\right)\right) \\ &< 2\cosh\tfrac{1}{2}\, \log\left(\cosh d\left(z,\gamma z\right) + \omega\sinh d\left(z,\gamma z\right)\right).\end{aligned}$$

Wiederum analog zu den bereits in (i) geführten Schlüssen erhält man hieraus wegen $|\sigma\left(tr\left(\gamma\right)\right)| = \left|tr\left(\sigma^{(n)}\left(M_n\gamma M_n^{-1}\right)\right)\right|$:

$$|\sigma\left(\lambda\right)| < \left(\frac{1}{2}\left(\lambda^2+\lambda^{-2}\right) + \frac{\omega}{2}\left(\lambda^2-\lambda^{-2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Verwendet man nun die oben erhaltene Abschätzung für $\omega = \psi\left(M_n\left(z\right), f_n\right)$ und beachtet, daß $z \in Achse\left(\gamma\right)$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt waren und sich die obige Argumentation auch auf alle Elemente in der Konjugationsklasse von γ in $N\left(\Gamma^2\right)$ anwenden läßt (die sämtlich dieselbe Spur wie γ haben), so folgt die Behauptung.

$\square$

Bemerkung: Satz 4.11 ist in den beiden Fällen (i) und (ii) eine echte Verbesserung von Satz 4.6, da die rechte Seite der Ungleichung wegen $c < 1$ bzw. $\tilde{c} < 1$ jedesmal echt kleiner als λ ist.

Korollar 4.12 *Sei* Γ *eine cofinite Fuchssche Gruppe, die eine modulare Einbettung erlaubt, sei* $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ *eine nicht–triviale Einbettung mit* $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2,2]$. *Liegt dann auf der Achse eines hyperbolischen Elements* $\gamma \in \Gamma^2$ *der Fixpunkt eines elliptischen Elements* $\tilde{\gamma} \in \Gamma^2$ *mit* $\sigma(tr(\tilde{\gamma})) \neq tr(\tilde{\gamma})$, *so ist:*

$$|\sigma(tr(\gamma))| < \left(\tfrac{1}{2}tr^2(\gamma) - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\tfrac{1}{2}tr^2(\gamma) - 1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz 4.11(i), da in diesem Fall gilt: $c = 0$. □

Ist eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe Γ modular einbettbar, so haben natürlich auch alle ihre Untergruppen endlichen Indexes diese Eigenschaft. Unter welchen Bedingungen läßt sich jedoch modulare Einbettbarkeit auf größere, das heißt Γ^2 echt umfassende, Gruppen fortsetzen? Mit dieser Frage, deren Beantwortung einige interessante Konsequenzen hat, wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Lemma 4.13 (Cohen/Wolfart [5]) *Sei* Γ *eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe. Enthält* Γ^2 *elliptische Elemente, so ist eine modulare Einbettung, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt.*

Beweis: Es genügt zu zeigen: die Komponentenfunktionen der modularen Einbettung sind eindeutig bestimmt. Sei dazu $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine nicht–triviale Einbettung mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2) \nsubseteq [-2,2]$ und f die σ zugeordnete Komponente der modularen Einbettung. Sei nun $\gamma \in \Gamma^2$ elliptisch mit Fixpunkt $z_0 \in \mathbb{H}$ und $\sigma(z_0) \in \mathbb{H}$ der Fixpunkt von $\sigma(\gamma)$ für eine geeignete Fortsetzung von σ. Nach Lemma 4.10 wissen wir, daß notwendigerweise

$$f(z_0) = \sigma(z_0)$$

gelten muß. Damit liegen die Werte von f auf dem ganzen Orbit $\Gamma^2(z_0)$ fest. Gehen wir zum Einheitskreismodell über, so gilt jedoch nach Lehner ([8], Satz 2.3.4), da Γ^2 cofinit ist:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma^2} 1 - |\gamma(z_0)| = \infty,$$

woraus wir unter Benutzung eines bekannten Resultates aus der Funktionentheorie (vergleiche z. B. Remmert [11], Kapitel 4, §3, 2.) die Eindeutigkeit von f erhalten.

□

Definition und Lemma 4.14 *Sei* Γ *eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe, sei* $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ *eine nicht–triviale Einbettung mit* $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2,2]$, *die o.B.d.A. schon so fortgesetzt sei, daß* $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2,\mathbb{R})$. $N(\Gamma^2)$ *bezeichne den Normalisator von* Γ^2 *in der Gruppe aller Isometrien der oberen Halbebene,* $Isom(\mathbb{H}) = PS^*L(2,\mathbb{R})$. *Für* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in N(\Gamma^2), a, b, d, c \in \mathbb{R}$ *mit* $ad - bc = -1$ *definiere:*

$$\tilde{\sigma}(\gamma) := \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}(a) & \tilde{\sigma}(b) \\ \tilde{\sigma}(c) & \tilde{\sigma}(d) \end{pmatrix} \quad und \quad \tilde{\sigma}(\gamma)(z) := \frac{\tilde{\sigma}(a)\,\overline{z} + \tilde{\sigma}(b)}{\tilde{\sigma}(c)\,\overline{z} + \tilde{\sigma}(a)},$$

wobei $\tilde{\sigma} : K := \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2), a, b, c, d) \hookrightarrow \mathbb{C}$ *eine Fortsetzung von* σ *sei (nach Satz 2.6 ist auch* K *ein algebraischer Zahlkörper für eine geeignete* $PSL(2,\mathbb{R})$*–Konjugation von* Γ^2*). Dann gilt:*

(i) $\tilde{\sigma}(\gamma) \in PS^*L(2,\mathbb{R})$ *oder* $\tilde{\sigma}(\gamma) \in \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) PS^*L(2,\mathbb{R})$.

(ii) $\sigma(\gamma \circ \tilde{\gamma} \circ \gamma^{-1})(z) = \tilde{\sigma}(\gamma) \circ \sigma(\tilde{\gamma}) \circ \tilde{\sigma}(\gamma^{-1})(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{H}$ *und alle* $\tilde{\gamma} \in \Gamma^2$.

Beweis (vergleiche auch Beweis von Lemma 4.3): Ist $\gamma \in N(\Gamma^2)$, so auch $\tilde{\sigma}(\gamma) \in N(\sigma(\Gamma^2))$. Da wir $\sigma(\Gamma^2)$ genau wie Γ^2 als Untergruppe der $PSL(2,\mathbb{R})$ ansehen können, muß wegen $\tilde{\sigma}(\gamma)\,\sigma(\Gamma^2) = \sigma(\Gamma^2)\,\tilde{\sigma}(\gamma)$ gelten: $\tilde{\sigma}(\gamma)(\mathbb{R} \cup \infty)$ ist $\sigma(\Gamma^2)$-invariant, also:

$$\tilde{\sigma}(\gamma)(\mathbb{R} \cup \infty) = \mathbb{R} \cup \infty$$

und damit folgt unmittelbar: $\tilde{\sigma}(\gamma)(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ oder $\tilde{\sigma}(\gamma)(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$. Wegen $\det\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) = 1$ und $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$ liefert dies die erste Behauptung. Außerdem schließen wir daraus:

$$\overline{\tilde{\sigma}(\gamma)(\overline{z})} = \tilde{\sigma}(\gamma)(z), \text{ für alle } z \in \mathbb{R},$$

mit dem Identitätssatz also auch

$$\overline{\tilde{\sigma}(\gamma)(\overline{z})} = \tilde{\sigma}(\gamma)(z), \text{ für alle } z \in \mathbb{H},$$

woraus sich wegen $\sigma(\tilde{\gamma}) \in PSL(2,\mathbb{R})$ die zweite Behauptung ergibt.

□

Lemma 4.15 *Sei* Γ *eine cofinite Fuchssche Gruppe, die eine modulare Einbettung erlaubt, sei* $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ *eine nicht–triviale Einbettung mit* $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2,2]$, *und sei* f *die* σ *zugeordnete Komponente der modularen Einbettung (*σ *sei o.B.d.A. schon so fortgesetzt, daß* $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2,\mathbb{R})$*). Sei* $\gamma \in N(\Gamma^2) \subset Isom(\mathbb{H})$, *und setze* σ *so zu einer Einbettung* $\tilde{\sigma}$ *fort, daß* $\tilde{\sigma}(\gamma)$ *erklärt ist. Dann erfüllt*

$$f^\gamma := \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f \circ \gamma^{-1} : \mathbb{H} \mapsto \{\pm\}\mathbb{H}$$

dieselbe Funktionalgleichung wie f, also: $f^{\gamma} \circ \tilde{\gamma}(z) = \sigma(\tilde{\gamma}) \circ f^{\gamma}(z)$*, für alle* $z \in \mathbb{H}$ *und alle* $\tilde{\gamma} \in \Gamma^2$*.*

Beweis: Nach Lemma 4.14 gilt: $\tilde{\sigma}(\gamma)(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ oder $\tilde{\sigma}(\gamma)(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$. Es bleibt noch zu zeigen, daß f^{γ} die Funktionalgleichung erfüllt; sei dazu $\tilde{\gamma} \in \Gamma^2$ und $z \in \mathbb{H}$ beliebig gewählt. Dann ergibt sich unter Verwendung vom Lemma 4.14, falls $\gamma \notin PSL(2,\mathbb{R})$ (im anderen Fall wissen wir bereits aus Lemma 4.3, daß die entsprechende Gleichung gilt):

$$\begin{aligned} f^{\gamma} \circ \tilde{\gamma}(z) &= \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f \circ \left(\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma} \circ \gamma\right)\left(\gamma^{-1} z\right) \\ &= \tilde{\sigma}(\gamma) \circ \sigma\left(\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma} \circ \gamma\right) \circ f\left(\gamma^{-1} z\right) \\ &= \tilde{\sigma}(\gamma) \circ \tilde{\sigma}(\gamma)^{-1} \circ \sigma(\tilde{\gamma}) \circ \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f\left(\gamma^{-1} z\right) \\ &= \sigma(\tilde{\gamma}) \circ f^{\gamma}(z). \end{aligned}$$

□

Satz 4.16 *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 4.15 gilt:*

(i) Enthält Γ^2 *elliptische Elemente, so gilt auch für alle* $\gamma \in N(\Gamma^2)$*, für die sich* σ *so zu einer Einbettung* $\tilde{\sigma}$ *fortsetzen läßt, daß* $\tilde{\sigma}(\gamma) \in Isom(\mathbb{H})$*:*

$$\tilde{\sigma}(\gamma) \circ f(z) = f \circ \gamma(z), \text{ für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Handelt es sich insbesondere bei γ *um eine hyperbolische Spiegelung, so ist auch* $\tilde{\sigma}(\gamma)$ *eine hyperbolische Spiegelung, und f muß die Spiegelachse von* γ *in die Spiegelachse von* $\tilde{\sigma}(\gamma)$ *abbilden.*

(ii) Existiert ein $\gamma \in N(\Gamma^2)$ *und eine Fortsetzung* $\tilde{\sigma}$ *von* σ *dergestalt, daß* $\tilde{\sigma}(\gamma) \notin Isom(\mathbb{H})$*, so gibt es eine antiholomorphe Funktion* g^{γ}*:*

$$g^{\gamma} := \overline{\tilde{\sigma}(\gamma) \circ f \circ \gamma^{-1}} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H},$$

die dieselbe Funktionalgleichung wie f erfüllt.

Beweis: (i) Nach Lemma 4.13 ist f eindeutig bestimmt. Da nun

$$f^{\gamma} := \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f \circ \gamma^{-1} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$$

nach Lemma 4.15 dieselbe Funktionalgleichung wie f erfüllt, so muß gelten: $f = f^{\gamma}$, was die erste Behauptung liefert. $\gamma \in N(\Gamma^2)$ ist genau dann eine hyperbolische Spiegelung, wenn gilt: $\det(\gamma) = -1$ und $tr(\gamma) = 0$. Diese Bedingungen bleiben offensichtlich bei algebraischer Konjugation unverändert, so daß wir unter der gemachten Voraussetzung $\tilde{\sigma}(\gamma) \in Isom(\mathbb{H})$ folgern können, daß auch $\tilde{\sigma}(\gamma)$ eine hyperbolische Spiegelung ist. Wähle nun ein beliebiges $z \in \mathbb{H}$ aus der Spiegelachse von γ. Dann erhalten wir:

$$\tilde{\sigma}(\gamma) \circ f(z) = f \circ \gamma(z) = f(z).$$

$f(z)$ wird also von $\tilde{\sigma}(\gamma)$ fixiert, muß sich also in der Spiegelachse von $\tilde{\sigma}(\gamma)$ befinden.

(ii) Nach Lemma 4.15 erfüllt

$$f^{\gamma} := \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f \circ \gamma^{-1} : \mathbb{H} \mapsto -\mathbb{H}$$

dieselbe Funktionalgleichung wie f. Damit ergibt sich analog zum Beweis von Lemma 4.3(ii) für $g^{\gamma} = \overline{f^{\gamma}} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ und beliebiges $\tilde{\gamma} \in \Gamma^2$ wegen $\sigma(\tilde{\gamma}) \in PSL(2,\mathbb{R})$:

$$g^{\gamma} \circ \tilde{\gamma} = \overline{f^{\gamma} \circ \tilde{\gamma}} = \overline{\sigma(\tilde{\gamma}) \circ f^{\gamma}} = \sigma(\tilde{\gamma}) \circ \overline{f^{\gamma}} = \sigma(\tilde{\gamma}) \circ g^{\gamma}.$$

□

Definition 4.2

(i) Für $z, w \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \infty$ definieren wir:

$$\begin{aligned} [z,w] &:= \text{die abgeschlossene } z \text{ und } w \text{ in } \mathbb{H} \text{ verbindende geodätische Strecke} \\ (z,w) &:= \text{die offene } z \text{ und } w \text{ in } \mathbb{H} \text{ verbindende geodätische Strecke} \end{aligned}$$

(ii) Sei $G \subset \mathbb{H}$ eine Geodätische und $z \in G$. Unter einer Halbumgebung von z bezüglich G, bezeichnet mit $U_{1/2}(z, G)$, verstehen wir jede Menge M, die sich folgendermaßen schreiben läßt: Es existiert eine (euklidische) Kreisscheibe $B(z,r) \subset \mathbb{H}$ um z mit Radius r und $M = B_1 \cup (G \cap B(z,r))$ oder $M = B_2 \cup (G \cap B(z,r))$, wobei mit B_1 bzw. B_2 die 2 Zusammenhangskomponenten von $B(z,r) \backslash G$ bezeichnet seien.

Satz 4.17 *Sei Γ eine semiarithmetische Gruppe, Γ^2 enthalte elliptische Elemente. Gibt es dann für eine geeignete $PSL(2,\mathbb{R})$–Konjugation von Γ hyperbolische Spiegelungen $S_{G_i} \in N(\Gamma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, an Geodätischen G_i und eine nicht–triviale Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$ dergestalt, daß:*

(i) die G_i ein hyperbolisches Polygon $P \subset \mathbb{H}$ beranden, und gleichzeitig

(ii) σ sich so zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ fortsetzen läßt, daß $\tilde{\sigma}(S_{G_i}) \in Isom(\mathbb{H})$, $i = 1, \ldots, n$, aber außerdem mindestens ein $\gamma \in N(\Gamma^2)$ existiert mit $\tilde{\sigma}(\gamma) \notin Isom(\mathbb{H})$,

so ist Γ nicht modular einbettbar.

Beweis: Wir nehmen an, Γ sei modular einbettbar. Dann ist nach Satz 4.2 die Funktionalgleichung

$$f \circ \gamma(z) = \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \text{ und alle } \gamma \in \Gamma^2$$

durch eine holomorphe bzw. antiholomorphe Funktion f lösbar. Nach Voraussetzung (ii) und Satz 4.16(ii) wissen wir, daß dann auch eine antiholomorphe bzw. holomorphe Funktion g, nämlich $g := \overline{\tilde{\sigma}(\gamma) \circ f \circ \gamma^{-1}} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, existiert, die dieselbe Funktionalgleichung wie f erfüllt. Sei o.B.d.A. f holomorph und g antiholomorph. Desweiteren erhalten wir nach Satz 4.16(i) und Voraussetzung (ii) über die Spiegelungen S_{G_i}, $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} &(1) & & f(G_i) \subset \tilde{\sigma}(G_i) \\ &(2) & \text{sowie} \quad & g(G_i) \subset \tilde{\sigma}(G_i), \end{aligned}$$

hierbei bezeichne $\tilde{\sigma}(G_i)$ die Spiegelachse von $\tilde{\sigma}(S_{G_i})$. Seien $v_i \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \infty$, $i = 1, \ldots, n$, die Ecken von P, dabei sei $v_i = G_i \cap G_{i+1}$ (Indizes modulo n gelesen).
Wir betrachten nun zunächst nur den Fall, daß das von den G_i berandete Polygon P kompakt ist, das heißt $v_i \in \mathbb{H}$ für $i = 1, \ldots, n$. Die obigen Beziehungen (1) und (2) implizieren:

$$f(v_i) = g(v_i) = \tilde{\sigma}(G_i) \cap \tilde{\sigma}(G_{i+1}) =: \tilde{\sigma}(v_i).$$

Für die i-te Seite $S_i \subset G_i$ von P gilt: $S_i = [v_{i-1}, v_i]$, $i = 1, \ldots, n$ (Indizes wieder modulo n gelesen). Unter erneuter Benutzung von (1) und (2) erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} f(S_i) &= [z_{i_1}, z_{i_2}] \supset [\tilde{\sigma}(v_{i-1}), \tilde{\sigma}(v_i)], \quad z_{i_1}, z_{i_2} \in \tilde{\sigma}(G_i) \text{ geeignet gewählt} \\ g(S_i) &= [w_{i_1}, w_{i_2}] \supset [\tilde{\sigma}(v_{i-1}), \tilde{\sigma}(v_i)], \quad w_{i_1}, w_{i_2} \in \tilde{\sigma}(G_i) \text{ geeignet gewählt.} \end{aligned}$$

Wir können nun $f(P) \cup g(P)$ schreiben als:

$$f(P) \cup g(P) = K \cup U,$$

wobei ($\mathring{P}$ bezeichne das Innere von P):

$$\begin{aligned} K &:= \bigcup_{i=1}^{n} \{z_{i_1}, z_{i_2}, w_{i_1}, w_{i_2}, \tilde{\sigma}(v_i)\} \\ U &:= \bigcup_{z \in \mathring{P}} (f(z) \cup g(z)) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\substack{z \in S_i \\ f(z) \notin K}} f(z) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\substack{z \in S_i \\ g(z) \notin K}} g(z). \end{aligned}$$

Behauptung: $U \subset \mathbb{H}$ ist offen.
Beweis der Behauptung:

Sei $z \in U$ beliebig. Falls $z \in f(\mathring{P}) \cup g(\mathring{P})$, so ist nach dem Offenheitsprinzip nichts zu zeigen. Sei also o.B.d.A. $z \in f(S_1) \cup g(S_1)$ und die Punkte $\tilde{\sigma}(v_1), \tilde{\sigma}(v_n,) z_{1_1}, z_{1_2}, w_{1_1}, w_{1_2}$ seien o.B.d.A. folgendermaßen angeordnet:

$$\begin{array}{rrcccc} & d(z_{1_1}, \tilde{\sigma}(v_n)) & < & d(z_{1_1}, \tilde{\sigma}(v_1)) & \leq & d(z_{1_1}, z_{1_2}) \\ \text{sowie} & d(w_{1_1}, \tilde{\sigma}(v_n)) & < & d(w_{1_1}, \tilde{\sigma}(v_1)) & \leq & d(w_{1_1}, w_{1_2}). \end{array}$$

1.Fall: Es existiert ein $w \in f^{-1}(z) \cap S_1$ mit $f'(w) = 0$. Wähle eine Halbumgebung $U_{1/2}(w, G_1)$ von w mit:

$$U_{1/2}(w, G_1) \subset P \quad \text{und} \quad U_{1/2}(w, G_1) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$$

(dies ist möglich, da $w \notin f^{-1}(K)$ und die Menge $f^{-1}(K)$ diskret ist). Dann ist $f\left(U_{1/2}(w, G_1)\right) \subset U$ wegen $f(G_1) \subset \tilde{\sigma}(G_1)$ eine Umgebung von z.

2. Fall: Es existiert ein $w \in g^{-1}(z) \cap S_1$ mit $\bar{g}'(w) = 0$. Argumentiere analog zum 1. Fall.

3. Fall: Sei $z \in (\tilde{\sigma}(v_n), \tilde{\sigma}(v_1))$ und für jedes $w \in f^{-1}(z) \cap S_1$ bzw. jedes $w' \in g^{-1}(z) \cap S_1$ gelte: $f'(w) \neq 0$ bzw. $\bar{g}'(w') \neq 0$. Orientiere $\tilde{\sigma}(G_1)$ von $\tilde{\sigma}(v_n)$ nach $\tilde{\sigma}(v_1)$ und G_1 von v_n nach v_1; o.B.d.A. befinde sich dann P auf der rechten Seite von G_1. Da wir wissen, daß

$$\begin{array}{rcccl} f(v_n) & = & g(v_n) & = & \tilde{\sigma}(v_n) \\ & & \text{und} & & \\ f(v_1) & = & g(v_1) & = & \tilde{\sigma}(v_1), \end{array}$$

so muß es $w \in f^{-1}(z) \cap S_1$ und $w' \in g^{-1}(z) \cap S_1$ mit der Eigenschaft geben, daß f eine genügend kleine Halbumgebung $U_1 := U_{1/2}(w, G_1) \subset P$ auf eine Halbumgebung $f(U_1)$ von z bezüglich $\tilde{\sigma}(G_1)$ abbildet, die auf der rechten Seite von $\tilde{\sigma}(G_1)$ liegt bzw. g eine genügend kleine Halbumgebung $U_2 := U_{1/2}(w', G_1) \subset P$ auf eine Halbumgebung $g(U_2)$ von z bezüglich $\tilde{\sigma}(G_1)$ abbildet, die auf der linken Seite von $\tilde{\sigma}(G_1)$ liegt. O.B.d.A. seien U_1 bzw. U_2 wieder so gewählt, daß

$$U_1 \cap f^{-1}(K) = \emptyset \quad \text{und} \quad U_2 \cap g^{-1}(K) = \emptyset.$$

Damit ist $(f(U_1) \cup g(U_2)) \subset U$ eine Umgebung von z.

4. Fall: Sei $z \in (z_{1_1}, \tilde{\sigma}(v_n))$ und für alle $w \in f^{-1}(z) \cap S_1$ gelte: $f'(w) \neq 0$. Betrachte die Menge

$$f^{-1}(\tilde{\sigma}(v_n)) \cap S_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}, \ x_0 := v_n.$$

Wegen $f(v_1) = \tilde{\sigma}(v_1)$ gilt: $k \geq 1$, falls $(z_{1_1}, \tilde{\sigma}(v_n)) \neq \emptyset$. Sei o.B.d.A.

$$d(v_n, x_1) < d(v_n, x_2) < \ldots < d(v_n, x_k).$$

Sei nun $w \in f^{-1}(z_{1_1}) \cap S_1$ beliebig gewählt. Dann existiert genau ein j, $0 \le j < k$, mit $w \in [x_j, x_{j+1}]$, und es gilt:

$$f([x_j, x_{j+1}]) = [z_{1_1}, \tilde{\sigma}(v_n)] \quad \text{sowie} \quad f(x_j) = f(x_{j+1}) = \tilde{\sigma}(v_n).$$

Damit müssen aber Punkte $y_1, y_2 \in [x_j, x_{j+1}] \cap f^{-1}(z)$ mit der Eigenschaft existieren, daß f genügend kleine Halbumgebungen $U_1 := U_{1/2}(y_1, G_1) \subset P$ bzw. $U_2 := U_{1/2}(y_2, G_1) \subset P$ auf Halbumgebungen $f(U_1)$ bzw. $f(U_2)$ von z bezüglich $\tilde{\sigma}(G_1)$ abbildet, die auf jeweils unterschiedlichen Seiten von $\tilde{\sigma}(G_1)$ liegen. O.B.d.A. sei wieder vorausgesetzt, daß

$$U_1 \cap f^{-1}(K) = \emptyset \quad \text{und} \quad U_2 \cap f^{-1}(K) = \emptyset.$$

Somit ist $(f(U_1) \cup f(U_2)) \subset U$ eine Umgebung von z.

5.Fall: Für $z \in (w_{1_1}, \tilde{\sigma}(v_n))$, $z \in (\tilde{\sigma}(v_1), z_{1_2})$ oder $z \in (\tilde{\sigma}(v_1), w_{1_2})$ läßt sich die im 4. Fall geführte Argumentation analog übertragen.

Damit sind alle möglichen Fälle behandelt worden, so daß die Behauptung bewiesen ist.

Sei nun $z_0 \in U$ beliebig gewählt. Betrachte alle orientierten geodätischen Strahlen, die von z_0 ausgehen. Da z_0 im Innern von $f(P) \cup g(P)$ liegt und $f(P) \cup g(P)$ kompakt ist, muß jeder dieser Strahlen $\partial(f(P) \cup g(P))$, den Rand von $f(P) \cup g(P)$, schneiden. Nun gilt aber offensichtlich, da U offen ist:

$$\partial(f(P) \cup g(P)) \subset K,$$

und K ist nur eine endliche Menge, wohingegen es unendlich viele paarweise disjunkte geodätische Strahlen gibt. Widerspruch!

Wenn P nicht kompakt ist, also Ecken $v_j, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, in $\mathbb{R} \cup \infty$ besitzt, so läßt sich fast dieselbe Argumentation führen. Schneiden sich zwei der Geodätischen G_j und G_{j+1} in $v_j \in \mathbb{R} \cup \infty$, so ist das Produkt

$$S_{G_j} \circ S_{G_{j+1}} \in N(\Gamma^2)$$

parabolisch mit Fixpunkt v_j. Ebenso ist $\tilde{\sigma}(S_{G_j}) \circ \tilde{\sigma}(S_{G_{j+1}})$ parabolisch mit Fixpunkt $\tilde{\sigma}(v_j)$. Nach einem Resultat von Schmutz Schaller/Wolfart [14] können wir dann f und g stetig nach v_j fortsetzen durch

$$f(v_j) = g(v_j) := \tilde{\sigma}(v_j).$$

Wir betrachten nun das kompaktifizierte Polygon $\overline{P} := P \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Die Definitionen von U und K können für $f(\overline{P}) \cup g(\overline{P})$ identisch übernommen werden und ebenso der Beweis dafür, daß $U \subset \mathbb{H}$ offen ist. Nun ist

$f\left(\overline{P}\right) \cup g\left(\overline{P}\right)$ kompakt in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \infty$, und man erhält auf dieselbe Weise wie vorher einen Widerspruch.

$\square$

Bemerkung: Ich vermute, daß schon die Existenz eines Elements $\gamma \in N(\Gamma^2)$ und einer Erweiterung $\tilde{\sigma}$ einer nicht–trivialen Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))) \nsubseteq [-2,2]$ und $\tilde{\sigma}(\gamma) \notin \mathit{Isom}(\mathbb{H})$ ausreicht, um die modulare Einbettbarkeit einer semiarithmetischen Gruppe Γ zu verhindern. Wenigstens im Fall, daß Γ^2 elliptische Elemente enthält, erscheint es mir jedenfalls äußerst unwahrscheinlich, daß es sowohl eine (jeweils eindeutig bestimmte) holomorphe Funktion als auch eine antiholomorphe Funktion gibt, die die erforderliche Funktionalgleichung erfüllt.

4.2 Modulare Einbettbarkeit von symmetrischen Fuchsschen Gruppen

Beschäftigt man sich mit der Frage nach der modularen Einbettbarkeit einer gegebenen Gruppe, so ist es zunächst sicherlich zweckmäßig, ein Kriterium dafür zu erarbeiten, für welche nicht–trivialen Einbettungen σ des Spurkörpers in die reellen Zahlen überhaupt eine holomorphe Funktion f^σ zu konstruieren ist, die die gewünschte Funktionalgleichung erfüllt. Mit anderen Worten: wann gilt $\sigma(\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))) \nsubseteq [-2,2]$? Dies läßt sich im Fall unserer speziellen symmetrischen Vierecksgruppen anhand des folgenden Satzes leicht entscheiden:

Satz 4.18 *Sei Γ eine semiarithmetische symmetrische Fuchssche Gruppe der Signatur $[2,2,2,t]$, und sei σ eine nicht–triviale Einbettung*

$$id \neq \sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2:

$$\sigma\left(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)\right) \subseteq [-2,2] \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\left(tr(x^2)\right), \sigma\left(tr(y^2)\right) \in [-2,2].$$

Beweis: Es bleibt nur die Rückrichtung zu zeigen.
Sei dazu σ eine nicht–triviale Einbettung $id \neq \sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$.
Aus $\sigma(tr(x^2), \sigma(tr(y^2)) \in [-2,2]$ folgt wegen $tr^2(\gamma) = tr(\gamma^2) + 2$ für alle $\gamma \in PSL(2,\mathbb{R})$

$$\sigma\left(tr^2(x)\right), \sigma\left(tr^2(y)\right) \geqslant 0.$$

Außerdem ist $\mathbb{Q}(\cos(\pi/t))$ für alle t ein total–reeller Zahlkörper, so daß zusätzlich stets gilt:

$$\sigma\left(\cos^2(\pi/t)\right) \geqslant 0.$$

Setze nun σ beliebig zu einer Einbettung σ_1:

$$\sigma_1 : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma)) = \mathbb{Q}(tr(x), tr(y), \cos(\pi/t)) \hookrightarrow \mathbb{R}\,(!)$$

fort. Dabei tritt die letzte Zeile nur für $t \equiv 1 \bmod 2$ auf (vgl. Bemerkung im Beweis von Satz 3.6).
Angenommen, die Behauptung sei unwahr. Dann existiert nach Lemma 3.2 ein hyperbolisches $\gamma \in \Gamma$ mit $|\sigma(tr(\gamma))| > 2$. Nach einem schon häufig verwendeten Resultat von Takeuchi [16] können wir o.B.d.A. annehmen, daß

$$\Gamma \subseteq PSL\Big(2, \mathbb{Q}\Big(\mathrm{Tr}(\Gamma), \sqrt{tr^2(\gamma) - 4}\Big)\Big).$$

Setze σ_1 nochmals zu einer Einbettung $\sigma_2 : \mathbb{Q}\Big(\mathrm{Tr}(\Gamma), \sqrt{tr^2(\gamma) - 4}\Big) \hookrightarrow \mathbb{C}$ fort. Wegen $|\sigma(tr(\gamma))| > 2$ gilt auch hier sogar (unabhängig von der speziellen Wahl der Fortsetzung):

$$\sigma_2 : \mathbb{Q}\Big(\mathrm{Tr}(\Gamma), \sqrt{tr^2(\gamma) - 4}\Big) \hookrightarrow \mathbb{R},$$

also: $\sigma_2(\Gamma) \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$.

Dies impliziert aber, da σ_2 Elementordnungen erhält und injektiv ist:

$$\begin{array}{lc} & \sigma_2(e_1), \sigma_2(e_2)\,\text{sind paarweise verschieden und elliptisch der Ordnung 2} \\ \Rightarrow & \sigma_2(e_1)\sigma_2(e_2) = \sigma_2(x)\,\text{ist hyperbolisch} \\ \Rightarrow & \sigma_2(x)^2 = \sigma_2(x^2)\,\text{ist hyperbolisch} \\ \Rightarrow & |tr(\sigma_2(x^2))| = |\sigma_2(tr(x^2))| = |\sigma(tr(x^2))| > 2. \end{array}$$

Widerspruch!

$\square$

Bemerkung: Die Beweisidee läßt sich auf beliebige nicht–elementare Fuchssche Gruppen übertragen; im allgemeinen muß man jedoch die Bedingung für ein hyperbolisches Element und ein Kommutatorprodukt überprüfen (siehe auch Kern-Isberner/Rosenberger [13], Korollar 2).

Lemma 4.19 *Sei Γ eine semiarithmetische Fuchssche Gruppe, sei $\gamma \in \Gamma^2$ ein elliptisches bzw. parabolisches Element mit Fixpunkt $z_0 \in \mathbb{H}$ bzw. $z_0 \in \mathbb{R} \cup \infty$ und $S \in N(\Gamma^2) \subset Isom(\mathbb{H})$ die Spiegelung an einer Geodätischen durch den Punkt z_0. Sei $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine Einbettung mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2, 2]$. Dann gilt für alle Fortsetzungen $\tilde{\sigma}$ von σ auf Γ^2 und S mit $\tilde{\sigma}(\Gamma^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$:*

$$\tilde{\sigma}(S) \in Isom(\mathbb{H}),$$

oder mit anderen Worten: $\tilde{\sigma}(S)$ ist wieder eine hyperbolische Spiegelung.

Beweis: Wäre $\tilde{\sigma}(S) \notin \mathit{Isom}(\mathbb{H})$, so müßte nach Lemma 4.15 gelten:

$$\tilde{\sigma}(S) : \mathbb{H} \mapsto -\mathbb{H}\,.$$

Betrachte nun die Operation von $\tilde{\sigma}(\gamma)$ und $\tilde{\sigma}(S)$ auf ganz $\mathbb{C} \cup \infty$.
Sei zunächst γ elliptisch, also $z_0 = x_0 + iy_0$, x_0, $y_0 \in \mathbb{R}\,, y_0 > 0$. Da nach Voraussetzung gilt:

$$\tilde{\sigma}(\gamma) \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

können wir $\tilde{\sigma}$ durch $\tilde{\sigma}(i) := i$ so fortsetzen, daß $\tilde{\sigma}(\gamma)$ die Punkte $\tilde{\sigma}(z_0) = \tilde{\sigma}(x_0) + i\tilde{\sigma}(y_1)$ und $\tilde{\sigma}(\overline{z_0}) = \tilde{\sigma}(x_0) - i\tilde{\sigma}(y_1)$ fixiert, wobei weiterhin $\tilde{\sigma}(x_0)\,, \tilde{\sigma}(y_0) \in \mathbb{R}$ (!). Hieraus ergibt sich aber:

$$\tilde{\sigma}(\overline{z_0}) = \overline{\tilde{\sigma}(z_0)}\,,$$

womit wir erhalten:

$$\tilde{\sigma}(S)(\tilde{\sigma}(z_0)) = \tilde{\sigma}(z_0) \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma}(S)(\tilde{\sigma}(\overline{z_0})) = \tilde{\sigma}(\overline{z_0})\,.$$

$\tilde{\sigma}(S)$ hat also einen Fixpunkt in der oberen Halbebene, was der Annahme $\tilde{\sigma}(S) : \mathbb{H} \mapsto -\mathbb{H}$ widerspricht. Also gilt doch: $\tilde{\sigma}(S) \in \mathit{Isom}(\mathbb{H})$ und damit ist $\tilde{\sigma}(S)$ nach Satz 4.16 (i) eine hyperbolische Spiegelung.

Ist γ parabolisch, so lassen sich die obigen Schlußweisen fast analog übertragen. Wäre $\tilde{\sigma}(S) \notin \mathit{Isom}(\mathbb{H})$, so gälte nach Lemma 4.14:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tilde{\sigma}(S) \in \mathit{Isom}(\mathbb{H})$$

und wegen $tr(\tilde{\sigma}(S)) = \tilde{\sigma}(tr(S)) = 0$ erhalten wir daraus:

$$\tilde{\sigma}(S)(z) = \overline{\alpha(z)}, \quad z \in \mathbb{H},$$

wobei $\alpha \in PSL(2, \mathbb{R})$ ein geeignet gewähltes elliptisches Element der Ordnung 2 ist. Nun hat aber nach Voraussetzung S den Fixpunkt $z_0 \in \mathbb{R} \cup \infty$ und damit $\tilde{\sigma}(S)$ den Fixpunkt $\tilde{\sigma}(z_0) \in \mathbb{R} \cup \infty$, was der obigen Darstellung von $\tilde{\sigma}(S)$ widerspricht.

□

Nunmehr sind wir in der Lage, folgendes zu zeigen:

Lemma 4.20 *Sei Γ eine symmetrische semiarithmetische Fuchssche Gruppe der Signatur $[t_1, t_2, \ldots, t_n]$, und sei $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine Einbettung mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2, 2]$. σ sei o.B.d.A. schon so erweitert, daß $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$. Dann gilt mit den Bezeichnungen von Definition 3.2:*

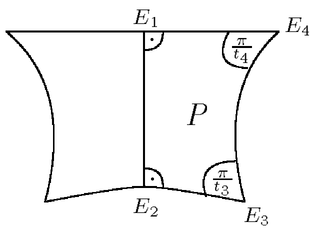
(i) Existiert kein i mit $t_i = t_{i+1} = 2$, $i = 1, 2, \dots, n$, (Indizes modulo n gelesen), so läßt sich σ zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ fortsetzen mit $\tilde{\sigma}(S(\Gamma)) \subset Isom(\mathbb{H})$.

(ii) Ist Γ modular einbettbar und existiert höchstens ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, mit $t_i = t_{i+1} = 2$ oder $t_i = t_{i+1} = t_{i+2} = 2$, (Indizes modulo n gelesen) und mindestens ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $t_j \neq \{2, \infty\}$, so läßt sich σ zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ fortsetzen mit $\tilde{\sigma}(S(\Gamma)) \subset Isom(\mathbb{H})$.

Beweis: Wir benutzen die Bezeichnungen aus Definition 3.2.

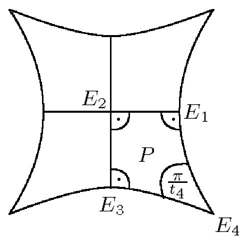
(i) Nach Voraussetzung liegt auf jeder Spiegelachse der die Gruppe $S(\Gamma)$ erzeugenden hyperbolischen Spiegelungen S_{G_i}, $i = 1, 2, \dots, n$, ein elliptischer bzw. parabolischer Fixpunkt von Γ^2. Damit läßt sich nach Lemma 4.19 σ in der angegebenen Weise zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ erweitern.

(ii) Es sind nur noch die Fälle zu überprüfen, die nicht bereits durch (i) abgedeckt sind. Sei also $t_i = t_{i+1} = 2$ bzw. $t_i = t_{i+1} = t_{i+2} = 2$ für genau ein i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Hier betrachten wir die Polygone $P_1 := P \cup S_{G_i}(P)$ bzw. $P_2 := (P \cup S_{G_i}(P)) \cup S_{G_{i+1}}(P \cup S_{G_i}(P))$. Im Fall von Vierecksgruppen haben P_1 bzw. P_2 demnach beispielsweise folgende Gestalt:



Polygon P_1

bzw.



Polygon P_2

Allgemein zeichnen sich P_1 bzw. P_2 dadurch aus, daß auf jeder ihrer Seiten mindestens ein parabolischer bzw. elliptischer Fixpunkt eines Elementes aus Γ^2 liegt. Damit läßt sich nach Lemma 4.19 σ so zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ fortsetzen, daß die $\tilde{\sigma}-$Konjugate aller Spiegelungen an den Seiten von P_1 bzw. P_2 wieder hyperbolische Spiegelungen sind. Da ein $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ existiert mit $t_j \notin \{2, \infty\}$, enthält Γ^2 elliptische Elemente, so daß wir aufgrund der vorausgesetzten modularen Einbettbarkeit von Γ mit Satz 4.17 schließen können: Für jede Erweiterung $\tilde{\sigma}'$ von $\tilde{\sigma}$ auf $S(\Gamma)$ muß zwingend gelten: $\tilde{\sigma}'(S(\Gamma)) \subset Isom(\mathbb{H})$.

□

Bevor wir uns weiter genauer ansehen, welche Eigenschaften modular einbettbare symmetrische Fuchssche Gruppen notwendigerweise besitzen müssen, wollen wir uns noch der Frage zuwenden, wie sich die Schnittwinkel der Achsen hyperbolischer Spiegelungen mit Einträgen in einem total–reellen algebraischen Zahlkörper bei algebraischer Konjugation der Matrixeinträge der Spiegelungen verändern. Dazu definieren wir zunächst wie folgt:

Definition 4.3 Seien G_1 und G_2 zwei Geodätische in $\mathbb{H}$, die sich in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{H}$ schneiden. Dann bezeichnen wir mit dem Winkel $\sphericalangle(G_1, G_2)$ zwischen G_1 und G_2, den eindeutig bestimmten Winkel $\vartheta \in [\,0, \pi)$ zwischen den Tangenten an G_1 und G_2 im Punkt z_0, gemessen im positiven Sinn von G_1 nach G_2.

Desweiteren definieren wir eine Funktion $\chi : PSL(2,\mathbb{R}) \mapsto \{0, -1, 1\}$ in der folgenden Weise: Für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL(2,\mathbb{R})$ sei

$$\chi(\gamma) := \begin{cases} -1 & : \; tr(\gamma) \cdot b < 0 \\ 1 & : \; tr(\gamma) \cdot b > 0 \\ 0 & : \; tr(\gamma) \cdot b = 0 \end{cases}$$

Lemma 4.21 *Sei $\gamma \in PSL(2,\mathbb{R})$ ein elliptisches Element mit Spur $|tr(\gamma)| = 2\cos\vartheta$, $\vartheta \in (0, \pi/2]$. Dann gilt: γ dreht im positiven Sinn um den Winkel $2\vartheta \in (0, \pi]$ genau dann, wenn $\chi(\gamma) \in \{0, 1\}$.*

Beweis: Sei zunächst i der Fixpunkt von γ. Dann dreht γ genau dann im positiven Sinn $2\vartheta \in (0, \pi]$, wenn sich γ darstellen läßt als

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

und dies impliziert offensichtlich: $\chi(\gamma) \in \{0, 1\}$.

Hat γ nun einen beliebigen Fixpunkt $z_0 \in \mathbb{H}$, so dreht γ genau dann im positiven Sinn um $2\vartheta \in (0, \pi]$ um z_0, wenn eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL(2,\mathbb{R})$ existiert mit

$$\begin{aligned} \gamma &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta - (ac + bd)\sin\vartheta & (a^2 + b^2)\sin\vartheta \\ * & \cos\vartheta + (ac + bd)\sin\vartheta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also auch in diesem Fall: $\chi(\gamma) \in \{0, 1\}$.

$\square$

Satz 4.22 *Seien $S_1, S_2 \in PS^*L(\mathbb{H}) = Isom(\mathbb{H})$ zwei Spiegelungen mit Einträgen in einem algebraischen Zahlkörper K, deren Achsen G_1 bzw. G_2 sich* *in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{H}$ schneiden. Sei $|tr\,(S_1 \circ S_2)\,| = 2\cos(\pi/t)$, $t \in \mathbb{N}$ und o.B.d.A. $\sphericalangle(G_2, G_1) = \pi/t$. Sei desweiteren $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine Einbettung mit $\sigma(\cos(\pi/t)) = \cos(k\pi/t)$ ($\mathrm{ggT}\,(2t, k) = 1$ und $1 \leq k < t$). Dann gilt für die Achsen $\sigma(G_1)$ und $\sigma(G_2)$ der algebraisch–konjugierten Spiegelungen $\sigma(S_1)$ und $\sigma(S_2)$:*

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(\sigma(G_2), \sigma(G_1)) &= k\pi/t, \textit{ falls } \chi(\sigma(S_2 \circ S_1)) \in \{0, 1\} \\
\sphericalangle(\sigma(G_2), \sigma(G_1)) &= (t-k)\,\pi/t, \textit{ falls } \chi(\sigma(S_2 \circ S_1)) = -1.
\end{aligned}$$

Beweis: $\gamma := S_1 \circ S_2$ dreht nach Voraussetzung um den Winkel $2\ \sphericalangle(G_2, G_1) = 2\pi/t$ in positiver Richtung. $\sigma(\gamma)$ dreht nach Lemma 4.21 um den Winkel $2k\pi/t$ in positiver Richtung, wenn $\chi(\sigma(\gamma)) \in \{0, 1\}$, bzw. um den Winkel $2k\pi/t$ in negativer Richtung, wenn $\chi(\sigma(\gamma)) = -1$. Andererseits dreht $\sigma(\gamma) = \sigma(S_1) \circ \sigma(S_2)$ um den Winkel $2\ \sphericalangle(\sigma(G_2), \sigma(G_1))$ in positiver Richtung, daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned}
2\ \sphericalangle(\sigma(G_2), \sigma(G_1)) &= 2k\pi/t, \text{ falls } \chi(\sigma(S_2 \circ S_1)) \in \{0, 1\} \\
2\ \sphericalangle(\sigma(G_2), \sigma(G_1)) &= 2\pi - 2k\pi/t, \text{ falls } \chi(\sigma(S_2 \circ S_1)) = -1,
\end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

□

Definition 4.4 Sei Γ eine symmetrische semiarithmetische Gruppe der Signatur $[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ und sei $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine Einbettung mit $\sigma(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2, 2]$. Läßt sich dann mit den Bezeichnungen von Definition 3.2 σ zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ erweitern mit $\tilde{\sigma}(S(\Gamma)) \subset \mathit{Isom}\,(\mathbb{H})$, so verabreden wir folgende Notation:

(i) $\tilde{\sigma}(E_i)$ bezeichne den eindeutig bestimmten Fixpunkt von $\tilde{\sigma}(e_i)$ in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \infty$.

(ii) $\tilde{\sigma}(G_i)$ bezeichne die eindeutig bestimmte Geodätische in $\mathbb{H}$, an der $\tilde{\sigma}(S_{G_i})$ (auch eine Spiegelung nach Satz 4.16) spiegelt.

(iii) Ist Γ so konjugiert, daß ∞ kein Fixpunkt von e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist so bezeichne die zu Γ und $\tilde{\sigma}$ gehörende Kurve $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ die folgende Teilmenge von $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$:

$$\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma}) := [\tilde{\sigma}(E_1), \tilde{\sigma}(E_2)] \cup \ldots [\tilde{\sigma}(E_{n-1}), \tilde{\sigma}(E_n)] \cup [\tilde{\sigma}(E_n), \tilde{\sigma}(E_1)].$$

(iv) Sei $\mathbb{H} \backslash \gamma(\Gamma, \tilde{\sigma}) = \bigcup_i Z_i$ die disjunkte Zerlegung von $\mathbb{H} \backslash \gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ in Zusammenhangskomponenten, und sei o.B.d.A. Z_1 die eindeutig bestimmte (im euklidischen Sinne) unbeschränkte Zusammenhangskomponente. Dann verstehen wir unter $\mathit{Ext}\,(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma}))$, dem Äußeren von $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$, und $\mathit{Int}\,(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma}))$, dem Innern von $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$, die folgenden Mengen:

$$Ext\,(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})) := Z_1 \quad \text{und} \quad Int\,(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})) := \bigcup_{i, i \neq 1} Z_i = \bigcup_{\substack{i \\ Z_i \text{ beschränkt}}} Z_i$$

(hierbei ist „beschränkt" wieder im Sinne der euklidischen Metrik zu verstehen).

(v) $z \in (\tilde{\sigma}(E_i), \tilde{\sigma}(E_{i+1}))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, heißt Randpunkt bezüglich $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$, wenn eine Halbumgebung $U_{1/2}(z, \tilde{\sigma}(G_i))$ (Definition 4.2) existiert mit

$$(U(z, \tilde{\sigma}(G_i)) \cap \mathbb{H} \backslash \gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})) \subset Ext\,(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})).$$

Jede solche Halbumgebung nennen wir eine Randhalbumgebung (bezüglich $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$) von z.

Satz 4.23 *Sei Γ eine symmetrische semiarithmetische Fuchssche Gruppe der Signatur $[t_1, t_2, \ldots, t_n]$, dabei existiere höchstens ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $t_i = t_{i+1} = 2$ oder $t_i = t_{i+1} = t_{i+2} = 2$, (Indizes modulo n gelesen) und mindestens ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $t_j \notin \{2, \infty\}$. Dann gelten mit den Bezeichnungen von Definition 3.2. und Definition 4.3 folgende Implikationen:*

(i) Ist Γ modular einbettbar, so gilt für jede nicht–triviale Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$ und für jede $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation von Γ, für die sich σ so fortsetzen läßt, daß $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$:

a) σ ist nochmals zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ fortsetzbar mit $\tilde{\sigma}(S(\Gamma)) \subset Isom\,(\mathbb{H})$.

b) Es existiert eine Funktion $f^{\tilde{\sigma}} : P \mapsto \mathbb{H}$, die im Innern von P holomorph oder antiholomorph und auf dem Rand von P stetig ist, mit

$$f^{\tilde{\sigma}}((E_i, E_{i+1})) \subset \tilde{\sigma}(G_i), \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n\ .$$

(ii) Γ ist modular einbettbar, wenn für jede nicht–triviale Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$ eine $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation von Γ existiert, für die sich σ so fortsetzen läßt, daß die Bedingungen a) und b) aus (i) erfüllt sind.

Beweis: (i) a) ist die Aussage von Lemma 4.20 und b) wurde in Satz 4.16 bewiesen, da für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die offene geodätische Strecke (E_i, E_{i+1}) in G_i, der Spiegelachse von S_{G_i}, enthalten ist.

(ii) Nach Satz 4.2 genügt es zu zeigen: jede holomorphe bzw. antiholomorphe Funktion $f^{\tilde{\sigma}}$, die die in b) beschriebenen Bedingungen erfüllt, läßt sich zu einer auf ganz $\mathbb{H}$ holomorphen bzw. antiholomorphen Funktion fortsetzen, die der Funktionalgleichung

$$f^{\tilde{\sigma}} \circ \gamma(z) = \tilde{\sigma}(\gamma) \circ f^{\tilde{\sigma}}(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \text{ und alle } \gamma \in \Gamma^2$$

genügt. Der Beweis hierfür beruht auf denselben Schlußweisen wie der Beweis der modularen Einbettbarkeit von Dreiecksgruppen (vergleiche Cohen/Wolfart [5]). Für alle E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, mit $E_i \in \mathbb{H}$ folgt aufgrund der Voraussetzung

$$f^{\tilde{\sigma}}\left((E_i, E_{i+1})\right) \subset \tilde{\sigma}(G_i) \quad \text{und} \quad f^{\tilde{\sigma}}\left((E_{i-1}, E_i)\right) \subset \tilde{\sigma}(G_{i-1})$$

und der Stetigkeit von $f^{\tilde{\sigma}}$ auf dem Rand von P:

$$f^{\tilde{\sigma}}(E_i) = \tilde{\sigma}(G_i) \cap \tilde{\sigma}(G_{i-1}) = \tilde{\sigma}(E_i).$$

Da die $S(\Gamma)$–Bilder von P außerdem die ganze obere Halbebene pflastern, läßt sich $f^{\tilde{\sigma}}$ wegen

$$f^{\tilde{\sigma}}\left((E_i, E_{i+1})\right) \subset \tilde{\sigma}(G_i), \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n,$$

zunächst durch sukzessive Anwendung des Schwarzschen Spiegelungsprinzips zu einer auf ganz $\mathbb{H}$ definierten Funktion fortsetzen. Diese erfüllt nach Konstruktion die geforderte Funktionalgleichung sogar für alle $\gamma \in S(\Gamma)$ und ist unmittelbar in allen Punkten $z \in \mathbb{H}$, die keine $S(\Gamma)$–Bilder von Eckpunkten von P sind, holomorph bzw. antiholomorph. Nach Satz 4.22 hat $f^{\tilde{\sigma}}$ in diesen Ausnahmepunkten jedoch (nach einer geeigneten Koordinatentransformation) lokal die Gestalt: $f^{\tilde{\sigma}}(z) = z^n$ bzw. $f^{\tilde{\sigma}}(z) = \overline{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$ geeignet, so daß die Holomorphie bzw. Antiholomorphie auch hier gewährleistet ist.

□

Satz 4.24 *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 4.23 gilt: Ist Γ modular einbettbar und σ eine nicht–triviale Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$, so hat mit den Bezeichnungen von Definition 4.4 und Satz 4.23 die σ zugeordnete Funktion $f := f^{\tilde{\sigma}}$ folgende Eigenschaften (Γ sei o.B.d.A. so konjugiert, daß ∞ kein Fixpunkt von e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ist):*

(i) $f(E_i) = \tilde{\sigma}(E_i)$ für alle $E_i \in \mathbb{H}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, und f läßt sich für alle $E_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, durch $f(E_i) := \tilde{\sigma}(E_i)$ stetig auf das kompaktifizierte Polygon $\overline{P}$ fortsetzen.

(ii) $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma}) \subset f\left(\overline{P}\right)$ und $\partial f\left(\overline{P}\right) \subset \gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$, wobei mit $\partial f\left(\overline{P}\right)$ der Rand von $f\left(\overline{P}\right)$ in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ bezeichnet sei.

(iii) $f(P) \cap Z_i = \emptyset$ oder $Z_i \subset f(P)$, für jede Zusammenhangskomponente Z_i von $\mathbb{H} \backslash \gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$, und damit $f(P) \cap Ext(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})) = \emptyset$.

(iv) Orientieren wir (E_i, E_{i+1}) von E_i nach E_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n$, (P liegt damit auf der linken Seite von $\partial\overline{P} = \gamma(\Gamma, id)$) und $(\tilde{\sigma}(E_i), \tilde{\sigma}(E_{i+1}))$ von $\tilde{\sigma}(E_i)$ nach $\tilde{\sigma}(E_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, so liegen alle Randhalbumgebungen von Randpunkten z bezüglich $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ auf ***einer*** *Seite von $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$. Dabei ist f*

genau dann holomorph bzw. antiholomorph, wenn diese Randhalbumgebungen auf der rechten bzw. linken Seite von $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ liegen.

(v) Ist $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ einfach, berandet also $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ ein hyperbolisches Polygon $P^{\tilde{\sigma}}$, so bildet f das Polygon $\overline{P}$ bijektiv auf $\overline{P^{\tilde{\sigma}}}$ ab. Diese Abbildung ist seiten– und eckentreu, erfüllt also für $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$f(E_i) = \tilde{\sigma}(E_i) \quad \textit{und} \quad f([E_i, E_{i+1}]) = [\tilde{\sigma}(E_i), \tilde{\sigma}(E_{i+1})].$$

Beweis:

(i) Die erste Aussage ist klar (vergleiche Lemma 4.10 bzw. Beweis von Satz 4.23) und die zweite ist ein Resultat von Schmutz Schaller/Wolfart [14].

(ii) Die erste Aussage ergibt sich wegen $f((E_i, E_{i+1})) \subset \tilde{\sigma}(G_i)$ unmittelbar daraus, daß

$$\tilde{\sigma}(E_i) = f(E_i) \in f(\overline{P}) \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zum Beweis der zweiten Aussage beachte man, daß aufgrund der Holomorphie bzw. Antiholomorphie von f nach dem Offenheitssatz gilt:

$$\partial f(\overline{P}) \subset f(\partial \overline{P}) = \bigcup_{i=1}^{n} f([E_i, E_{i+1}]).$$

Wegen $f([E_i, E_{i+1}]) \subset \tilde{\sigma}(G_i)$ und $f(E_i) = \tilde{\sigma}(E_i)$ gilt außerdem für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $v_{i_1}, v_{i_2} \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ geeignet gewählt ($v_{i_1} = \tilde{\sigma}(E_i)$ bzw. $v_{i_2} = \tilde{\sigma}(E_{i+1})$, falls $\tilde{\sigma}(E_i) \in \mathbb{R}$ bzw. $\tilde{\sigma}(E_{i+1}) \in \mathbb{R}$ und $v_{i_1} \in \mathbb{H}$ bzw. $v_{i_2} \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $\tilde{\sigma}(E_i) \in \mathbb{H}$ bzw. $\tilde{\sigma}(E_{i+1}) \in \mathbb{H}$):

$$f([E_i, E_{i+1}]) = [v_{i_1}, v_{i_2}] \supseteq [\tilde{\sigma}(E_i), \tilde{\sigma}(E_{i+1})].$$

v_{i_1} und v_{i_2} seien dabei o.B.d.A. so angeordnet, daß entweder $v_{i_1} = \tilde{\sigma}(E_i)$ bzw. $v_{i_2} = \tilde{\sigma}(E_{i+1})$ oder

$$\begin{gathered}(v_{i_1}, \tilde{\sigma}(E_i)) \cap (\tilde{\sigma}(E_i), \tilde{\sigma}(E_{i+1})) = \emptyset \\ \text{bzw.} \\ (\tilde{\sigma}(E_{i+1}), v_{i_2}) \cap (\tilde{\sigma}(E_i), \tilde{\sigma}(E_{i+1})) = \emptyset\end{gathered}$$

Es bleibt zu zeigen, daß für $v_{i_1} \neq \tilde{\sigma}(E_i)$ bzw. $v_{i_2} \neq \tilde{\sigma}(E_{i+1})$ gilt:

$$[v_{i_1}, \tilde{\sigma}(E_i)) \cap \partial f(\overline{P}) \text{ bzw. } (\tilde{\sigma}(E_{i+1}), v_{i_2}] \cap \partial f(\overline{P}) \text{ sind leer.}$$

Sei dazu zunächst $z \in (v_{i_1}, \tilde{\sigma}(E_i))$.

1. Fall: Es existiert ein $w \in f^{-1}(z) \cap (E_i, E_{i+1})$ mit $f'(w) = 0$ bzw. $\bar{f}'(w) = 0$. Dann wird eine Halbumgebung $U_{1/2}(w, G_i) \subset P$ von w durch

f auf eine volle Umgebung von z abgebildet, so daß z im Innern von $f(P)$ liegt.

2. Fall: Für alle $w \in f^{-1}(z) \cap (E_i, E_{i+1})$ gilt: $f'(w) \neq 0$ bzw. $\bar{f}'(w) \neq 0$. Wegen $f(E_i) = \tilde{\sigma}(E_i)$ und $f(E_{i+1}) = \tilde{\sigma}(E_{i+1})$ muß es dann Punkte $w_1, w_2 \in f^{-1}(z) \cap (E_i, E_{i+1})$ sowie Halbumgebungen $U_1 := U_{1/2}(w_1, G_i) \subset P$ und $U_2 := U_{1/2}(w_2, G_i) \subset P$ geben, so daß $f(U_1)$ und $f(U_2)$ Halbumgebungen von z sind, die auf unterschiedlichen Seiten von $\tilde{\sigma}(G_i)$ liegen (dasselbe Argument wurde im Beweis von Satz 4.17, 4. Fall, noch genauer ausgeführt). $f(U_1) \cup f(U_2)$ ist damit eine Umgebung von z, so daß auch in diesem Fall z im Innern von $f\left(\overline{P}\right)$ liegt.

Falls $z \in (\tilde{\sigma}(E_{i+1}), v_{i_2})$, so läßt sich die obige Argumentation analog führen. Damit erhalten wir:

$$\partial f\left(\overline{P}\right) \subset \left(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{v_{i_1}, v_{i_2}\}\right).$$

Da $\partial f\left(\overline{P}\right)$ außerdem keine isolierten Punkte enthalten kann, folgt daraus ummittelbar: $\partial f\left(\overline{P}\right) \subset \gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$.

(iii) Sei Z_i eine beliebige Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \backslash \gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$. Zum Beweis der ersten Behauptung genügt es zu zeigen: $U_1 := Z_i \cap f(P)$ und $U_2 := Z_i \cap (\mathbb{H} \backslash f(P))$ sind beides offene Mengen in $\mathbb{H}$.

Die Offenheit von U_2 ergibt sich sofort, da Z_i offen ist. Sei also o.B.d.A. $U_1 \neq \emptyset$ und $z \in U_1$. Dann folgt aus (ii), daß z im Innern von $f\left(\overline{P}\right)$, das mit dem Inneren von $f(P)$ übereinstimmt, liegen muß. Damit können wir eine offene Umgebung von z wählen mit $U(z) \subset f(P)$, so daß wegen der Offenheit von Z_i dann $U(z) \cap Z_i$ eine offene Umgebung von z ist, die ganz in U_1 liegt.

Zum Beweis der zweiten Behauptung ist nur zu beachten, daß P wegen unserer Voraussetzung $e_i \neq \infty$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ eine im euklidischen Sinne beschränkte Teilmenge von $\mathbb{H}$ ist. Also ist zwingend auch $f(P)$ im euklidischen Sinne beschränkt, und damit aufgrund des oben Bewiesenen:

$$f(P) \cap Ext(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})) = \emptyset.$$

(iv) Angenommen, f ist holomorph. Gäbe es dann eine Randhalbumgebung $U_1 := U_{1/2}(z, \tilde{\sigma}(G_i))$ eines Punktes $z \in (\tilde{\sigma}(E_i), \tilde{\sigma}(E_{i+1}))$, die auf der linken Seite von $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ liegt, so wähle $w \in f^{-1}(z) \cap (E_i, E_{i+1})$ und eine Halbumgebung $U_2 := U_{1/2}(w, G_i)$ mit $U_2 \subset P$. Aufgrund der Holomorphie von f impliziert dies zwingend:

$$f(U_2) \cap U_1 \cap Ext(\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})) \neq \emptyset,$$

was sich in offensichtlichem Widerspruch zu Aussage (ii) unseres Satzes befindet. Für den Fall, daß f antiholomorph ist, schließe man analog.

(v) Da $\gamma\left(\Gamma, \tilde{\sigma}\right)$ nach Voraussetzung einfach ist, sind $Int\left(\gamma\left(\Gamma, \tilde{\sigma}\right)\right)$ und $Ext\left(\gamma\left(\Gamma, \tilde{\sigma}\right)\right)$ zusammenhängend. Damit folgt aus (i) und (iii), daß f eine surjektive Abbildung

$$f : \overline{P} \mapsto \overline{P^{\tilde{\sigma}}}$$

beschreibt, die in der angegebenen Weise seiten– und eckpunkttreu ist. Es bleibt zu zeigen: f ist injektiv.

Sei dazu $\mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe, $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ und $\overline{\mathbb{E}}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe, $\overline{\mathbb{E}} := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| \leq 1\}$; wähle erweiterte Riemannsche Abbildungen

$$\begin{aligned} f_1 : \overline{\mathbb{E}} &\mapsto \overline{P} \\ f_2 : \overline{\mathbb{E}} &\mapsto \overline{P^{\tilde{\sigma}}}. \end{aligned}$$

Setze $\boldsymbol{E_i} := f_1^{-1}\left(E_i\right)$und $\boldsymbol{\tilde{\sigma}}\left(\boldsymbol{E_i}\right) := f_2^{-1}\left(\tilde{\sigma}\left(E_i\right)\right), i = 1, 2, \ldots, n$, und definiere für zwei verschiedene Punkte $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| = |w| = 1$:

$[z, w] :=$ das z und w bei positivem Umlauf von z nach w verbindende abgeschlossene Segment des Einheitskreises
$(z, w) :=$ das z und w bei positivem Umlauf von z nach w verbindende offene Segment des Einheitskreises.

Damit erfüllt $g := f_2^{-1} \circ f \circ f_1 : \overline{\mathbb{E}} \mapsto \overline{\mathbb{E}}$:

$$\begin{gathered} g(\boldsymbol{E}_i) = \boldsymbol{\tilde{\sigma}}\left(\boldsymbol{E}_i\right) \\ g([\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{E}_{i+1}]) = [\boldsymbol{\tilde{\sigma}}\left(\boldsymbol{E}_i\right), \boldsymbol{\tilde{\sigma}}\left(\boldsymbol{E}_{i+1}\right)]. \\ \text{(Indizes modulo n gelesen)} \end{gathered}$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß f bzw. g holomorph ist (denn die Schlüsse lassen sich im Falle der Antiholomorphie analog führen). Als endliche innere Abbildung von $\mathbb{E}$ muß g dann ein endliches Blaschke-Produkt sein, das heißt:

$$g\left(z\right) = \eta \prod_{i=1}^{m} \frac{z - c_i}{\overline{c_i} z - 1}, \text{ mit } |\eta| = 1 \text{ und } c_i \in \mathbb{E}, i = 1, \ldots, m.$$

Damit ist g eine auf ganz $\Sigma := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorphe Funktion, die $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{E}$, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$ auf S^1 und $\Sigma \setminus \overline{\mathbb{E}}$ auf $\Sigma \setminus \overline{\mathbb{E}}$ abbildet. Dies impliziert:

$$g'\left(z\right) \neq 0, \text{ für alle } z \in S^1,$$

da ansonsten Punkte aus $\mathbb{E}$ in einer genügend kleinen Umgebung einer Nullstelle der Ableitung von g auf Punkte außerhalb von $\overline{\mathbb{E}}$ abgebildet werden müßten. g beschreibt somit eine m–fache unverzweigte Überlagerung der S^1, so daß für jedes $z \in S^1$ die Menge $g^{-1}(z)$ aus genau m paarweise verschiedenen Punkten besteht. Wir möchten nun zeigen, daß $g : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$ biholomorph ist oder mit anderen Worten, daß $m = 1$ gilt.

Angenommen: $m \geq 2$. Somit existiert ein $w \in g^{-1}(\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{E_1})\,)$ mit $w \neq \boldsymbol{E_1}$ und $w \in (\boldsymbol{E_1},\boldsymbol{E_2})$ oder $w \in (\boldsymbol{E_n},\boldsymbol{E_1})$(aufgrund der Seitentreue von g). Wegen $g'(w) \neq 0$ wird folglich eine Umgebung $U(w)$ von w auf der S^1, $U(w) \subset (\boldsymbol{E_1},\boldsymbol{E_2})$ bzw. $U(w) \subset (\boldsymbol{E_n},\boldsymbol{E_1})$, homöomorph auf eine Umgebung von $\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{E_1})$ auf der S^1 abgebildet, was im Widerspruch zu

$$g([\boldsymbol{E_1},\boldsymbol{E_2}])=[\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{E_1})\,,\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{E_2})\,] \text{ bzw. } g([\boldsymbol{E_n},\boldsymbol{E_1}])=[\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{E_n})\,,\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{E_1})\,]$$

steht. Also ist doch $g : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$ und damit $f : \overline{P} \mapsto \overline{P^{\tilde{\sigma}}}$ bijektiv.

□

Für den Spezialfall, daß es sich bei Γ um eine Vierecksgruppe handelt, erhalten wir aus den beiden vorangegangenen Sätzen folgendes Ergebnis:

Korollar 4.25 *Sei Γ eine semiarithmetische symmetrische Vierecksgruppe der Signatur $[t_1, t_2, t_3, t_4]$, wobei mindestens ein $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ existiere mit $t_j \notin \{2, \infty\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Γ ist modular einbettbar.

(ii) Für jede nicht–triviale Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) \not\subseteq [-2, 2]$ und eine beliebige $PSL(2, \mathbb{R})$–Konjugation von Γ mit $E_i \neq \infty$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, für die sich σ so fortsetzen läßt, daß $\sigma(\Gamma^2) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, gilt:

- *a) σ läßt sich nochmals zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ fortsetzen mit $\tilde{\sigma}(S(\Gamma)) \subset \mathit{Isom}(\mathbb{H})$.*
- *b) $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ ist einfach, und die eindeutig bestimmte holomorphe bzw. antiholomorphe erweiterte Riemannsche Abbildung $f^{\tilde{\sigma}}$, die das kompaktifizierte hyperbolische Viereck $\overline{P}$ mit Ecken E_1, E_2, E_3 und E_4 eckpunkttreu in E_1, E_2, E_3 auf das kompaktifizierte hyperbolische Polygon $\overline{P^{\tilde{\sigma}}}$ mit Ecken $\tilde{\sigma}(E_1)$, $\tilde{\sigma}(E_2)$, $\tilde{\sigma}(E_3)$ und $\tilde{\sigma}(E_4)$ abbildet, das heißt mit $f^{\tilde{\sigma}}(E_i) = \tilde{\sigma}(E_i)$ für $i = 1, 2, 3$ erfüllt zusätzlich:*

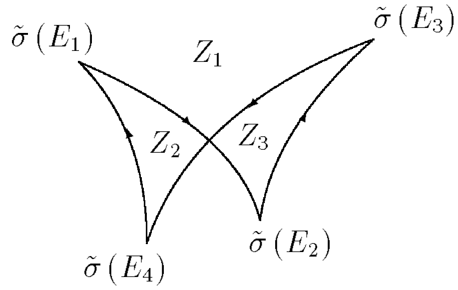
$$f^{\tilde{\sigma}}(E_4) = \tilde{\sigma}(E_4)\,.$$

Beweis: Nach Satz 4.24 bleibt nur noch zu zeigen: Ist Γ modular einbettbar, so ist $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ zwingend einfach.

$\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ ist genau dann nicht einfach, wenn ein $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ existiert mit (Indizes modulo n gelesen):

$$[\tilde{\sigma}(E_i), \tilde{\sigma}(E_{i+1})] \cap [\tilde{\sigma}(E_{i+2}), \tilde{\sigma}(E_{i+3})] \neq \emptyset.$$

Beispielsweise:



$\mathbb{H} \backslash \gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ setzt sich in diesem Fall also aus einer unbeschränkten Zusammenhangskomponente Z_1 und zwei beschränkten Zusammenhangskomponenten Z_2 und Z_3 zusammen, bei denen es sich jeweils um hyperbolische Dreiecke handelt. Nun ist aber leicht einzusehen, daß es hier, wenn wir den Rand von $P^{\tilde{\sigma}}$ in der in Satz 4.24 (iv) angegebenen Weise orientieren, sowohl Randhalbumgebungen von Randpunkten bezüglich $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ gibt, die auf der linken Seite von $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ liegen, als auch Randhalbumgebungen, die auf der rechten Seite von $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ liegen. Nach Satz 4.24 (iv) ist Γ damit nicht modular einbettbar.

$\square$

Korollar 4.26 *Sei* Γ *eine symmetrische Fuchssche Gruppe der Signatur* $[2, 2, 2, t]$ *oder* $[2, 2, t, t]$ *mit* $t \in \{3, 4, 6\}$. *Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\Gamma \textit{ ist modular einbettbar} \Leftrightarrow \Gamma \textit{ ist arithmetisch.}$$

Beweis: Angenommen, Γ ist modular einbettbar, aber nicht arithmetisch. Dann existiert eine nicht–triviale Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2, 2]$. Nach Korollar 4.25 läßt sich σ zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ fortsetzen mit $\tilde{\sigma}(S(\Gamma)) \subset \mathit{Isom}(\mathbb{H})$, wobei die Kurve $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ ein hyperbolisches Viereck $P^{\tilde{\sigma}}$ berandet. Besitzt P an der Ecke E_i den Innenwinkel π/m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, so sei der Innenwinkel von $P^{\tilde{\sigma}}$ an der Ecke $\tilde{\sigma}(E_i)$ mit $\tilde{\sigma}(\pi/m_i)$ bezeichnet. Nach Satz 4.22 gilt dann:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}(\pi/2) &\in \{\pi/2, 3\pi/2\} \\
\tilde{\sigma}(\pi/3) &\in \{\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3\} \\
\tilde{\sigma}(\pi/4) &\in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\} \\
\tilde{\sigma}(\pi/6) &\in \{\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6\}.
\end{aligned}$$

Da $P^{\tilde{\sigma}}$ ein hyperbolisches Viereck ist, muß andererseits für die Innenwinkelsumme gelten:

$$\sum_{i=1}^{4} \tilde{\sigma}\,(\pi/m_i) < 2\pi.$$

Hat Γ die Signatur $[2,2,2,t]$ bzw. $[2,2,t,t]$ mit $t \in \{3,4,6\}$, so kann dies unter Berücksichtigung aller oben beschriebenen Möglichkeiten für die Innenwinkel von $P^{\tilde{\sigma}}$ nur auftreten, wenn **alle** Winkel invariant bleiben. Dies impliziert jedoch: $\tilde{\sigma}\,(\Gamma)$ ist eine Fuchssche Gruppe, was im Widerspruch zu Satz 4.7 steht. (Man kann dies auch direkt einsehen: Die nach Korollar 4.25 bei modularer Einbettbarkeit existierende erweiterte Riemannsche Abbildung $f^{\tilde{\sigma}}$, die das Viereck P o.B.d.A. biholomorph, seiten– und eckentreu auf das Viereck $P^{\tilde{\sigma}}$ abbildet, ließe sich dann zu einer biholomorphen Funktion $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ erweitern, also $f \in PSL(2,\mathbb{R})$. Damit würde für alle $\gamma \in \Gamma$ gelten: $\tilde{\sigma}\,(\gamma) = f \circ \gamma \circ f^{-1}$, woraus sich zwingend ergäbe, daß $\sigma : \mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Identität ist. Widerspruch!)

$\square$

Zum Schluß dieser Arbeit wollen wir noch Beispiele strikt semiarithmetischer Gruppen der Signatur $[2,2,2,t]$ angeben, bei denen für alle relevanten Einbettungen σ des Spurkörpers $\mathbb{Q}\,(\mathrm{Tr}\,(\Gamma^2))$ die Bedingung (ii) a) aus Korollar 4.25 erfüllt ist und auch $\gamma\,(\Gamma,\tilde{\sigma})$ einfach ist. Bei diesen Gruppen ist modulare Einbettbarkeit also wirklich nur von der Existenz einer erweiterten holomorphen oder antiholomorphen Riemannschen Abbildung mit der in Korollar 4.25 (ii) b) beschriebenen Eigenschaft abhängig. Wir benötigen vorerst noch ein Lemma:

Lemma 4.27 *Sei $t \in \mathbb{N}$, $t > 2$, mit folgender Eigenschaft: Für alle $k \in \mathbb{N}$, $1 < k < t/2$ und $k \equiv 1 \bmod 2$, gelte:* $\mathrm{ggT}\,(t,k) > 1$. *Dann ist $t \in \{3,4,5,6,9\}$.*

Beweis: 1. Fall: $t \equiv 0 \bmod 2$. Dann sind nach Voraussetzung sogar alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 < k < t/2$ nicht teilerfremd zu t und damit auch alle $k \in \mathbb{N}$ mit $t/2 < k < t-1$. Bezeichnen wir mit φ die Eulersche Phi–Funktion, so impliziert dies: $\varphi\,(t) \leq 3$, also $t \in \{4,6\}$.

2. Fall: $t \equiv 1 \bmod 2$, o.B.d.A. $t > 11$. Zum Beweis der Behauptung genügt es zu zeigen: Existierte ein $t \in \mathbb{N}$, $t > 11$, das die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, so gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, n paarweise verschiedene Primzahlen $p_1 = 3, p_2 = 5, p_3, \ldots, p_n$ mit:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \text{ teilt } t.$$

Beweis durch vollständige Induktion über n:
Induktionsanfang $n = 2$:
$t > 11$ impliziert $3, 5 < t/2$, also nach Voraussetzung: $3 \cdot 5$ teilt t.
Induktionsannahme:
Sei die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ wahr.
Induktionsschritt $n \Rightarrow n + 1$:
Seien $p_1 = 3 < p_2 = 5 < p_3 \ldots < p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen, deren Produkt t teile. Betrachte

$$m := \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{n} p_n - 1 \right).$$

m ist durch keines der p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, teilbar, und m ist auch keine reine Zweierpotenz, da dies implizieren würde:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i = 2^l + 1, \text{ mit } l \in \mathbb{N} \text{ geeignet.}$$

Also wegen $p_1 = 3$ und $p_2 = 5$:

$$\begin{aligned} 2^l &\equiv -1 \bmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad l \equiv 1 \bmod 2 \\ 2^l &\equiv -1 \bmod 5 \quad \Leftrightarrow \quad l \equiv 2 \bmod 4. \end{aligned}$$

Widerspruch! Also existiert eine Primzahl $p_{n+1} > 2$, die m teilt und von den p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, verschieden ist. Wegen $p_{n+1} < m < t/2$ folgt nach Voraussetzung des Lemmas: p_{n+1} teilt t, womit der Induktionsschritt bewiesen ist.

$\square$

Satz 4.28 *Sei* Γ *eine symmetrische Fuchssche Gruppe der Signatur* $[2, 2, 2, t]$ *mit* $t \in \mathbb{N}$, $t > 2$. *Mit den Bezeichnungen von Lemma 3.2 setze*

$$tr^2(x) := 4 + 2\cos(\pi/t).$$

Dann gilt für die dadurch nach Korollar 3.4 bis auf $PSL(2, \mathbb{R})$*–Konjugation eindeutig bestimmte Gruppe* Γ*:*

(i) Für jede Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\sigma\left(\mathrm{Tr}\left(\Gamma^2\right)\right) \subseteq [-2, 2] \Leftrightarrow \sigma(\cos(\pi/t)) < 0.$$

(ii) Γ *ist immer semiarithmetisch, und* Γ *ist arithmetisch genau dann, wenn* $t \in \{3, 4, 5, 6, 9\}$.

(iii) Jede Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2,2]$ läßt sich (für eine geeignete $PSL(2,\mathbb{R})$–Konjugation von Γ) so zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ erweitern, daß

1. *$\tilde{\sigma}(S(\Gamma))$ weiterhin eine reelle Gruppe ist, mit anderen Worten: $\tilde{\sigma}(S(\Gamma)) \subset Isom(\mathbb{H})$, und*
2. *die Γ und $\tilde{\sigma}$ zugeordnete Kurve $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ (siehe Definition 4.4) einfach ist.*

Beweis: (i) Nach Lemma 3.2 gilt mit den dortigen Bezeichnungen wegen $tr^2(x) := 4 + 2\cos(\pi/t)$:

$$tr^2(y) = 4 + 8\cos(\pi/t).$$

Damit erhalten wir, daß eine Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Spuren $tr(x^2)$ und $tr(y^2)$ genau dann so verändert, daß

$$\sigma\left(tr\left(x^2\right)\right), \sigma\left(tr\left(y^2\right)\right) \in [-2,2],$$

wenn $\sigma(\cos(\pi/t)) < 0$, und dies ist nach Satz 4.18 genau dann der Fall, wenn $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \subseteq [-2,2]$.

(ii) Die Semiarithmetizität von Γ folgt direkt aus Korollar 3.7 unter Beachtung der oben im Beweis von (i) hergeleiteten Darstellung von $tr^2(y)$. Nach Satz 3.6 ist $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) = \mathbb{Q}(\cos(\pi/t))$, und demnach ist Γ unter Benutzung von (i) genau dann arithmetisch, wenn für alle nicht–trivialen Einbettungen $\sigma : \mathbb{Q}(\cos(\pi/t)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\sigma(\cos(\pi/t)) < 0.$$

Dies ist für $t \in \{3,4,5,6,9\}$ offensichtlich der Fall, und nach Lemma 4.27 existieren für alle anderen t zu $2t$ teilerfremde Zahlen n, die kleiner sind als $t/2$, also auch Einbettungen σ mit:

$$\tilde{\sigma}(\cos(\pi/t)) = \cos(n\pi/t) > 0.$$

(iii) Wegen (i) und $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma)) = \mathbb{Q}(tr(x), tr(y), \cos(\pi/t))$ (benutze Korollar 3.5 und Lemma 3.2) läßt sich jede Einbettung σ des Spurkörpers $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma^2))$ mit $\sigma(\mathrm{Tr}(\Gamma^2)) \nsubseteq [-2,2]$ zunächst zu einer Einbettung $\sigma_1 : \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma)) \hookrightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen. Für eine geeignete $PSL(2,\mathbb{R})$– Konjugation von Γ ist dann σ_1 zu einer Einbettung σ_2 weiter fortsetzbar mit:

$$\sigma_2(\Gamma) \subset PSL(2,\mathbb{R}).$$

Nach Lemma 4.19 läßt sich σ_2 damit nochmals zu einer Einbettung $\tilde{\sigma}$ fortsetzen mit $\tilde{\sigma}(S(\Gamma)) \subset Isom(\mathbb{H})$.

Wäre $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ nicht einfach, so müßte $\gamma(\Gamma, \tilde{\sigma})$ zwei hyperbolische Dreiecke beranden (vergleiche Beweis von Korollar 4.25). Eines von diesen würde dann aber nach Satz 4.22 zwei Innenwinkel α_1, α_2 mit $\alpha_i = \tilde{\sigma}(\pi/2) \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, $i = 1, 2$, besitzen. Widerspruch!

$\square$

Literatur

[1] A. Borel und Harish–Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, Ann. of. Math **75** (1962), Seite 485–535.

[2] A. Beardon, *A strengthening of the Schwarz–Pick lemma*, American monthly Vol. **99**, Nr.3 (1992), Seite 216–217.

[3] P. Bjørstad und E. Grosse, *Conformal mapping of circular arc polygons*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **8** (1987), Seite 19–32.

[4] P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Birkhäuser Boston Basel Berlin (1992).

[5] P. Cohen und J. Wolfart, *Modular embeddings for some non–arithmetic Fuchsian groups*, Acta Arithm. **61** (1990), Seite 93–100.

[6] R.H. Fox, *On Fenchel's conjecture about F-groups*, Mat. Tidsskr. B (1952), Seite 61–65.

[7] L.H. Howell, *Numerical conformal mapping of circular arc polygons*, Journal of Computational and Applied Mathematics **46** (1993), Seite 7–28.

[8] J. Lehner, *Automorphic Forms*, in *Discrete Groups and Automorphic Functions* (W.J. Harvey ed.), Academic Press, London–New York–San Francisco 1977, Seite 73–120.

[9] J. Mennicke, *Eine Bemerkung über Fuchssche Gruppen*, Inventiones math. **2** (1967), Seite 301–305 sowie **6** (1968), Seite 106.

[10] S. Katok, *Fuchsian Groups*, University of Chicago Press London (1992).

[11] R. Remmert, *Funktionentheorie II*, Springer–Verlag 1991.

[12] S. Ricker, *Semiarithmetische Fuchssche Vierecks- und Fünfecksgruppen und modulare Einbettungen*, unveröffentlichte Diplomarbeit (1998).

[13] G. Kern-Isberner und G. Rosenberger, *Einige Bemerkungen über Untergruppen der $PSL(2,\mathbb{C})$*, Resultate der Mathematik **6** (1983), Seite 40–46.

[14] P. Schmutz Schaller und J. Wolfart, *Semi–arithmetic Fuchsian groups and modular embeddings*, steht kurz vor der Veröffentlichung im J. London Math. Soc..

[15] G. Shimura, *Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves*, Ann. Math. **85** (1967), Seite 58–159.

[16] K. Takeuchi, *A characterization of arithmetic Fuchsian groups*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), Seite 600–612.

[17] K. Takeuchi, *Arithmetic triangle groups*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), Seite 91–106.

[18] P. L. Waterman und C. MacLachlan, *Fuchsian groups and algebraic number fields*, Transactions AMS **287**(1985), Seite 353–364.

[19] S. Yamashita, *The Pick version of Schwarz lemma and comparison of the Poincare densities*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, Math. **19** (1994), no.2, Seite 291–322.

Lebenslauf

Sabine Ricker,
geboren am 8. April 1972 in Rheda–Wiedenbrück.

1978–1982	Grundschule Ludwig–Uhland–Schule in Neu–Isenburg
1982–1991	Ziehengymnasium Frankfurt am Main
1991	Abitur
1991–1993	Ausbildung zur Bankkauffrau bei der Dresdner Bank AG in Frankfurt am Main
Herbst 1993	Immatrikulation zum Diplomstudiengang Informatik an der Johann Wolfgang Goethe–Universität Frankfurt am Main
Sommer 1994	Studienfachwechsel zum Diplomstudiengang Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe–Universität Frankfurt am Main
1. November 1995	Vordiplom in Mathematik mit Nebenfach Linguistik (Germanistik)
1995–1999	Stipendiatin der Studienstiftung des deutschen Volkes
14. August 1998	Diplom in Mathematik mit Nebenfach Linguistik (Germanistik), Diplomarbeit zum Thema „Semiarithmetische Fuchssche Vierecks– und Fünfecksgruppen und modulare Einbettungen“ bei Herrn Prof. Dr. Jürgen Wolfart
September 1998 – März 1999	promotionsvorbereitender Aufenthalt an der Oregon State University, Corvallis, Oregon, USA (Betreuer: Prof. Thomas A. Schmidt)
seit 1. April 1999	wissenschaftliche Mitarbeiterin in der AG 8.2 am Fachbereich Mathematik der Universität Frankfurt (bei Herrn Prof. Dr. Wolfgang Schwarz)